



ÉCONOMÉTRIE SPATIALE

Master 2 APE

Chapitre 3

Gilles de Truchis

gilles.detruchis@gmail.com

Site : www.varennnes-ecofin.com/



1. Modèles spatiaux avec dépendance

1.1 Modèles spatiaux autorégressif et moyenne mobile

1.2 Modèles spatiaux avec variables exogènes

MODÈLES SPATIAUX AVEC DÉPENDANCE

CONTENTS

1. Modèles spatiaux avec dépendance

1.1 Modèles spatiaux autorégressif et moyenne mobile

1.2 Modèles spatiaux avec variables exogènes

INTRODUCTION

- ▶ Rappelons que nous travaillons avec $X = \{x_i, i \in I\}$ un processus aléatoire avec
 - ▶ I un ensemble spatial
 - ▶ i un site d'observation
 - ▶ x_i un événement de E , l'ensemble des états
- ▶ Dans le cadre de ce cours, on supposera $i \in I$ déterministe et des données latticielles
- ▶ Nous avons vu comment tester l'autocorrélation spatiale, nous allons voir comment la modéliser
 - ⇒ Approche par la covariance paramétrique
 - ⇒ Approche par la covariance d'un modèle paramétrique

APPROCHE PAR LA COVARIANCE

- ▶ On peut mesurer la covariance entre x_i et x_j directement

⇒ La matrice de covariance doit être bien spécifiée

- ▶ dépendre de la distance
 - ▶ symétrique
 - ▶ définie positive
-
- ▶ Exemple : soit $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ des réalisations équidistantes d'un ensemble spatiale représentant une ligne droite (route)
 - ▶ Pour simplifier, l'ensemble spatiale est une ligne droite (route)
 - ▶ La matrice de poids est une matrice de distance
 - ▶ On retiendra la mesure de covariance spatiale de type exponentiel :

$$\text{cov}(x_i, x_j) = f(\theta, d_{ij}) = \exp(-\theta d_{ij}), \quad \theta = 0.3$$

APPROCHE PAR LA COVARIANCE

- La matrice de distance est de la forme

APPROCHE PAR LA COVARIANCE

- La matrice de distance est de la forme

$$W(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- On obtient

APPROCHE PAR LA COVARIANCE

- La matrice de distance est de la forme

$$W(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- On obtient

$$\text{cov}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0.74082 & 0.54881 & 0.40657 & 0.30119 \\ 0.74082 & 1 & 0.74082 & 0.54881 & 0.40657 \\ 0.54881 & 0.74082 & 1 & 0.74082 & 0.54881 \\ 0.40657 & 0.54881 & 0.74082 & 1 & 0.74082 \\ 0.30119 & 0.40657 & 0.54881 & 0.74082 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice est définie positive car

APPROCHE PAR LA COVARIANCE

- La matrice de distance est de la forme

$$W(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- On obtient

$$\text{cov}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0.74082 & 0.54881 & 0.40657 & 0.30119 \\ 0.74082 & 1 & 0.74082 & 0.54881 & 0.40657 \\ 0.54881 & 0.74082 & 1 & 0.74082 & 0.54881 \\ 0.40657 & 0.54881 & 0.74082 & 1 & 0.74082 \\ 0.30119 & 0.40657 & 0.54881 & 0.74082 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice est définie positive car

$$\det(\text{cov}(x_i, x_j)) = 0.04144 > 0$$

APPROCHE PAR UN MODÈLE PARAMÉTRIQUE (1)

- Repartons d'un processus temporel AR(1) stationnaire ($|\rho| < 1$)

$$\Rightarrow y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i. i. d. } (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- La représentation moyenne mobile nous donne

$$\begin{aligned} y_t &= \rho(\rho y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \rho^2 y_{t-2} + \rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \dots \\ &= \rho^n y_{t-n} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

- Notons que $\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = \frac{1}{1-\rho}$ car $|\rho| < 1$.
- Avec $\varepsilon_t \sim \text{i. i. d. } (0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\text{cov}(y_t, y_{t-h})$ est alors donnée par

APPROCHE PAR UN MODÈLE PARAMÉTRIQUE (1)

- Repartons d'un processus temporel AR(1) stationnaire ($|\rho| < 1$)

$$\Rightarrow y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d.} (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- La représentation moyenne mobile nous donne

$$\begin{aligned} y_t &= \rho(\rho y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \rho^2 y_{t-2} + \rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \dots \\ &= \rho^n y_{t-n} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

- Notons que $\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = \frac{1}{1-\rho}$ car $|\rho| < 1$.
- Avec $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.} (0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\text{cov}(y_t, y_{t-h})$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} \text{cov}(y_t, y_{t-h}) &= \mathbb{E}\left((y_t - \mathbb{E}(y_t)) - (y_{t-h} - \mathbb{E}(y_{t-h}))\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j-h}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^h \rho^{2j} \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-j-h}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^h \rho^{2j} \mathbb{E}(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-j-h}) \\ &= \rho^h \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2j} \mathbb{E}(\varepsilon_{t-j}^2) = \rho^h \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2j} \sigma_\varepsilon^2 = \rho^h \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2} \end{aligned}$$

APPROCHE PAR UN MODÈLE PARAMÉTRIQUE (2)

- A présent, transposons cela dans le domaine spatial noncausal

$$\Rightarrow x_i = \rho(x_{i+1} + x_{i-1}) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Ensemble spatial décrivant une ligne droite



- La représentation moyenne mobile se complexifie beaucoup

$$\begin{aligned} x_i &= \rho(\rho(x_{i-2} + x_i) + \varepsilon_{i-1} + \rho(x_i + x_{i+2}) + \varepsilon_{i+1}) + \varepsilon_i \\ &= 2\rho^2 x_i + \rho^2 x_{i-2} + \rho^2 x_{i+2} + \rho\varepsilon_{i-1} + \rho\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i \\ &= \dots \end{aligned}$$

- Le développement récursif devient vite ingérable
- \Rightarrow de nouveau les matrices de poids vont nous intéresser

APPROCHE PAR UN MODÈLE PARAMÉTRIQUE (3)

- Soit un processus spatial autorégressif stationnaire de la forme

$$X = \rho W X + \varepsilon, \quad \varepsilon_i \sim \text{i. i. d. } (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- On peut réécrire ce processus ainsi (représentation de Wold) :

$$X = (I - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

avec I une matrice identité $n \times n$

- Cela requiert l'inversibilité de $(I - \rho W)$

INVERSIBILITÉ

► $(I - \rho W)$ est inversible si $\det(I - \rho W) \neq 0$

► La condition d'inversibilité peut s'analyser via les valeurs propres de W car

$$\det(I - \rho W) = \prod_i (1 - \rho \omega_i)$$

► D'après le théorème de Gerschgorin, si W est une matrice carrée,

$$|\omega_i| \leq \max_i \sum_j w_{ij}, \quad |\omega_i| \leq \max_j \sum_i w_{ij}$$

⇒ On en déduit alors que $(I - \rho W)$ est inversible si

$$|\rho| < \frac{1}{\min \left(\max_i \sum_j w_{ij}, \max_j \sum_i w_{ij} \right)}$$

► Avec $W^{(s)}$, $\max_i \sum_j w_{ij} = 1$ et la condition d'inversibilité devient $|\rho| \leq 1$

EXEMPLE

- En repartant de l'exemple $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et avec W une matrice de contiguïté d'ordre 1 on a

EXEMPLE

- En repartant de l'exemple $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et avec W une matrice de contiguïté d'ordre 1 on a

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE

- Cherchons à spécifier la matrice de variance/covariance de X

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(XX') = (I - \rho W)^{-1} \mathbb{E}(\varepsilon \varepsilon') (I - \rho W)^{-1}$$

- En spécifiant $\rho = 0.3$ et $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$ on a

EXEMPLE

- Cherchons à spécifier la matrice de variance/covariance de X

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(XX') = (I - \rho W)^{-1} \mathbb{E}(\varepsilon \varepsilon') (I - \rho W)^{-1}$$

- En spécifiant $\rho = 0.3$ et $\varepsilon_i \sim \text{i. i. d. } (0, 1)$ on a

$$\mathbb{V}(X) = \begin{pmatrix} 1.38866 & 0.925232 & 0.461062 & 0.200682 & 0.072398 \\ 0.925232 & 1.84973 & 1.12591 & 0.53346 & 0.200682 \\ 0.461062 & 1.12591 & 1.92212 & 1.12591 & 0.461062 \\ 0.200682 & 0.53346 & 1.12591 & 1.84973 & 0.925232 \\ 0.072398 & 0.200682 & 0.461062 & 0.925232 & 1.38866 \end{pmatrix}$$

- A titre de comparaison, calculons $\mathbb{V}(Y)$ pour $y_t = 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$

EXEMPLE

- Cherchons à spécifier la matrice de variance/covariance de X

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(XX') = (I - \rho W)^{-1} \mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')(I - \rho W)^{-1}$$

- En spécifiant $\rho = 0.3$ et $\varepsilon_i \sim \text{i. i. d. } (0, 1)$ on a

$$\mathbb{V}(X) = \begin{pmatrix} 1.38866 & 0.925232 & 0.461062 & 0.200682 & 0.072398 \\ 0.925232 & 1.84973 & 1.12591 & 0.53346 & 0.200682 \\ 0.461062 & 1.12591 & 1.92212 & 1.12591 & 0.461062 \\ 0.200682 & 0.53346 & 1.12591 & 1.84973 & 0.925232 \\ 0.072398 & 0.200682 & 0.461062 & 0.925232 & 1.38866 \end{pmatrix}$$

- A titre de comparaison, calculons $\mathbb{V}(Y)$ pour $y_t = 0.3y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\mathbb{V}(Y) = \begin{pmatrix} 1.0989 & 0.32967 & 0.09890 & 0.02967 & 0.00890 \\ 0.32967 & 1.0989 & 0.32967 & 0.09890 & 0.02967 \\ 0.09890 & 0.32967 & 1.0989 & 0.32967 & 0.09890 \\ 0.02967 & 0.09890 & 0.32967 & 1.0989 & 0.32967 \\ 0.00890 & 0.02967 & 0.09890 & 0.32967 & 1.0989 \end{pmatrix}$$

BILAN

- En comparant l'approche temporelle et l'approche spatiale on constate que

	Temporel	Spatial
Variance	Stable dans le temps	Instable dans l'espace
Variance	Plus petite	Plus grandes
Covariance	Plus petite	Plus grandes
Covariance	Stable dans le temps	Instable dans l'espace

- L'hétéroscédasticité engendre une violation du théorème de Gauss-Markov
⇒ OLS inefficaces
- Nous verrons pas la suite qu'en générale les OLS sont même inconsistants

LE MODÈLE SAR

- Le modèle que nous venons de voir est un modèle SAR
⇒ Spatial AutoRégressive

- Le modèle SAR est donc de la forme

$$X = \rho W X + \varepsilon, \quad \varepsilon_i \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- Si le processus est stationnaire, sa représentation de **Wold** est

$$X = (I - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

- Sa matrice de variance/covariance est de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(XX') = (I - \rho W)^{-1} \mathbb{E}(\varepsilon \varepsilon') (I - \rho W)^{-1} \\ &= (I - \rho W)^{-1} \Omega_\varepsilon (I - \rho W)^{-1} \\ \Omega_\varepsilon &= \sigma_\varepsilon^2 I \end{aligned}$$

LE MODÈLE SMA

- Une autre spécification possible est le modèle SMA
⇒ Spatial Moving Average

- Le modèle SMA est de la forme

$$X = \rho W\varepsilon + \varepsilon, \quad \varepsilon_i \sim \text{i. i. d. } (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- Si le processus est stationnaire, sa représentation de **Wold** est

$$X = (I + \rho W)\varepsilon$$

- Sa matrice de variance/covariance est de la forme

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(XX') = (I + \rho W)\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')(I + \rho W) \\ &= (I + \rho W)\Omega_\varepsilon(I + \rho W) \\ \Omega_\varepsilon &= \sigma_\varepsilon^2 I\end{aligned}$$

LE MODÈLE SARMA

- ▶ En combinant un SAR et un SMA on obtient un modèle SARMA
 ⇒ Spatial AutoRégressive Moving Average

- ▶ Le modèle SARMA est donc de la forme

$$X = \phi W X + \psi W \varepsilon + \varepsilon, \quad \varepsilon_i \sim \text{i. i. d. } (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- ▶ Si le processus est stationnaire, sa représentation de **Wold** est

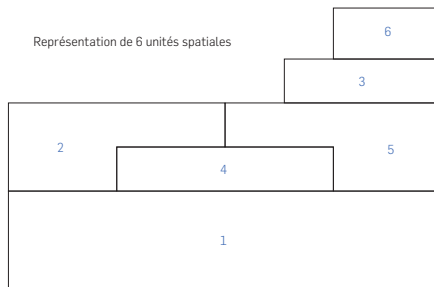
$$X = (I + \psi W)(I - \phi W)^{-1} \varepsilon$$

- ▶ Sa matrice de variance/covariance est de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(XX') = (I + \psi W)(I - \phi W)^{-1} \mathbb{E}(\varepsilon \varepsilon') (I + \psi W)(I - \phi W)^{-1} \\ &= (I + \psi W)(I - \phi W)^{-1} \Omega_\varepsilon (I + \psi W)(I - \phi W)^{-1} \\ \Omega_\varepsilon &= \sigma_\varepsilon^2 I \end{aligned}$$

EXERCICE

- Repartons de la représentation suivante :



- Construire la matrice de contiguïté d'ordre 1
 ► Calculez $\mathbb{V}(X)$ pour les modèles suivants :

$$X_1 = 0.2 W X_1 + \varepsilon$$

$$X_2 = 0.1 W \varepsilon + \varepsilon$$

$$X_3 = 0.2 W X_3 + 0.1 W \varepsilon + \varepsilon, \quad \varepsilon_i \sim \text{i.i.d. } (0, 1)$$

CORRECTION

- Pour la matrice de contiguïté on obtient :

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pour le modèle X_1 on obtient

$$\mathbb{V}(X_1) = \begin{pmatrix} 2.14363 & 1.44918 & 0.418294 & 1.44918 & 1.53162 & 0.101974 \\ 1.44918 & 2.14363 & 0.418294 & 1.44918 & 1.53162 & 0.101974 \\ 0.418294 & 0.418294 & 1.35652 & 0.418294 & 0.797005 & 0.491084 \\ 1.44918 & 1.44918 & 0.418294 & 2.14363 & 1.53162 & 0.101974 \\ 1.53162 & 1.53162 & 0.797005 & 1.53162 & 2.39705 & 0.214346 \\ 0.101974 & 0.101974 & 0.491084 & 0.101974 & 0.214346 & 1.14217 \end{pmatrix}$$

CORRECTION

► Pour les modèles X_2 et X_3 on obtient

$$\mathbb{V}(X_2) = \begin{pmatrix} 1.03 & 0.22 & 0.01 & 0.22 & 0.22 & 0. \\ 0.22 & 1.03 & 0.01 & 0.22 & 0.22 & 0. \\ 0.01 & 0.01 & 1.02 & 0.01 & 0.2 & 0.2 \\ 0.22 & 0.22 & 0.01 & 1.03 & 0.22 & 0. \\ 0.22 & 0.22 & 0.2 & 0.22 & 1.04 & 0.01 \\ 0. & 0. & 0.2 & 0. & 0.01 & 1.01 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{V}(X_3) = \begin{pmatrix} 3.18672 & 2.62422 & 0.803798 & 2.62422 & 2.7868 & 0.201968 \\ 2.62422 & 3.18672 & 0.803798 & 2.62422 & 2.7868 & 0.201968 \\ 0.803798 & 0.803798 & 1.65382 & 0.803798 & 1.38117 & 0.775269 \\ 2.62422 & 2.62422 & 0.803798 & 3.18672 & 2.7868 & 0.201968 \\ 2.7868 & 2.7868 & 1.38117 & 2.7868 & 3.66535 & 0.399861 \\ 0.201968 & 0.201968 & 0.775269 & 0.201968 & 0.399861 & 1.25395 \end{pmatrix}$$

CONTENTS

1. Modèles spatiaux avec dépendance

1.1 Modèles spatiaux autorégressif et moyenne mobile

1.2 Modèles spatiaux avec variables exogènes

MODÈLE DE RÉGRESSION EN COUPE

- ▶ Repartons du modèle de régression en coupe

$$y_i = \alpha + \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$$

- ▶ Hypothèses standards

- ▶ $\varepsilon \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma_\varepsilon^2 I)$
- ▶ Orthogonalité entre ε et X
- ▶ X est de rang plein (indépendance dans les colonnes de X)

- ▶ Ces hypothèses permettent l'application de la méthode des MCO

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'Y$$

- ▶ On peut alors déduire les calculs d'impacts suivants

- ▶ Impacts directs : $\partial y_i / \partial x_{ik} = \beta_k, \quad \forall i, k$
- ▶ Impacts indirectes : $\partial y_i / \partial x_{jk} = 0, \quad \forall j \neq i$

MODÈLE DE RÉGRESSION SPATIALE SAR-X

- ▶ Les modèles spatiaux précédant n'impliquaient que la variable dépendante et un terme d'erreur
 - ▶ la variable dépendante : $Y = \rho WY + \varepsilon$
 - ▶ et/ou les erreurs : $Y = \rho W\varepsilon + \varepsilon$
 - ▶ Sous les hypothèses standards, l'estimateur **MCO est inconsistant** pour le SAR
- ▶ Des spécifications hybrides impliquant des variables exogènes sont également possibles (SAR-X) :

$$Y = \rho WY + \beta X + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$$

- ▶ Sous les hypothèses standards, l'estimateur **MCO est inconsistant**
 - ▶ si ρ connu, β peut s'estimer par MCO
- ▶ Dans ce cas, la forme réduite du processus est

$$(I - \rho W)Y = \beta X + \varepsilon \iff Y = (I - \rho W)^{-1}\beta X + (I - \rho W)^{-1}\varepsilon$$

VARIANCE DU MODÈLE SPATIALE SAR-X

- Supposons X non-stochastique dans le modèle spatiale hybride

$$Y = (I - \rho W)^{-1} \beta X + (I - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

- On constate que Y dépend

- d'un choc stochastique $(I - \rho W)^{-1} \varepsilon$ qui impacte y_i mais également les j localisations voisines
- d'une variable exogène $(I - \rho W)^{-1} X$ qui impacte y_i mais également les j localisations voisines

- L'impact de X et de ε décroît avec la distance car $(I - \rho W)^{-1}$ peut se réécrire comme une expansion Debreu-Herstein

$$(I - \rho W)^{-1} = I + \rho W + \rho^2 W^2 + \rho^3 W^3 + \dots$$

- La variance de Y est alors

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(YY') = (I - \rho W)^{-1} \sigma_\varepsilon^2 I (I - \rho W)^{-1}$$

CALCULS D'IMPACT DU MODÈLE SPATIALE SAR-X

- A présent, comparons les calculs d'impact du modèle en coupe et du modèle spatial
- Afin de faire apparaître les p coefficients, réécrivons le modèle :

$$Y = \sum_{k=1}^p (I - \rho W)^{-1} I \beta_k x_{.,k} + (I - \rho W)^{-1} \varepsilon = \sum_{k=1}^p S_k x_{.,k} + (I - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

- Sous forme matricielle on obtient

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p \begin{pmatrix} S_{k,11} & S_{k,12} & \cdots & S_{k,1n} \\ S_{k,21} & S_{k,22} & & S_{k,2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{k,n1} & S_{k,n2} & \cdots & S_{k,nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} + (I - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

- On en déduit les impacts directs et indirects suivants :

$$\partial y_i / \partial x_{ik} = S_{k,ii} \neq \beta_k$$

$$\partial y_i / \partial x_{jk} = S_{k,ij} \neq 0$$

MODÈLE SAR EXOTIQUE

- ▶ On peut également spécifier un modèle de type SAR-X exotique

- ▶ Deux matrices de poids sont considérées

⇒ W_1 = voisinage à une échelle spatiale agrégée (e.g. régions)

⇒ W_2 = voisinage à une échelle spatiale désagrégée (e.g. départements)

$$Y = \rho_1 W_1 Y + \rho_2 W_2 Y + \beta X + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$$

- ▶ Sous les hypothèses standards, l'estimateur **MCO est inconsistant**

MODÈLE SPATIALE AVEC EXOGÈNES DÉCALÉES

- ▶ Le modèle précédent était de type SAR-X
- ▶ Considérons à présent un modèle sans composante SAR mais avec exogènes décalées

$$Y = \beta X + \varphi WZ + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$$

- ▶ Les variables de Z ne sont pas nécessairement les variables de X
- ▶ Tout comme pour le SAR, si on utilise $W^{(s)}$, $(WZ)_{ik}$ représente la moyenne pondérée de z_k sur les observations voisines de i
- ▶ Sous les hypothèses standards, l'estimateur **MCO est consistant**

MODÈLE SPATIALE DE DURBIN

- Combinons à présent tous ces modèles pour obtenir une spécification de type **Durbin**

$$Y = \rho WY + \beta X + \varphi WZ + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$$

- Z comprend les variables de X et éventuellement d'autres variables
- Ce modèle possède les mêmes propriétés qu'un SAR-X

⇒ Sous les hypothèses standards, l'estimateur **MCO est inconsistant**

MODÈLES SEM & SARAR

- ▶ On peut également spécifier un modèle où la dépendance apparaît dans les erreurs
 ⇒ Spatial Error Model (SEM)

$$Y = \beta X + u, \quad u = \lambda W u + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$$

- ▶ Sous les hypothèses standards, l'estimateur **MCO est non-biaisé mais inefficace**
 ⇒ l'estimateur n'atteint pas la borne de Cramer-Rao

- ▶ On peut également spécifier un modèle où la dépendance apparaît dans les erreurs et dans la variable dépendante
 ⇒ Modèle SARAR

$$Y = \rho W_1 Y + \beta X + u, \quad u = \lambda W_2 u + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$$

- ⇒ Sous les hypothèses standards, l'estimateur **MCO est inconsistant**

MODÈLE SARARMA

- ▶ On peut également spécifier un modèle plus complexe :
 - ▶ composante AR sur Y + composante AR sur u + composante MA sur ε
- ⇒ Modèle SARARMA

$$Y = \rho W_1 Y + \beta X + u, \quad u = \lambda W_2 u + \varepsilon, \quad \varepsilon = (I + \theta W_3)\nu, \quad \nu \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$$

⇒ Sous les hypothèses standards, l'estimateur **MCO est inconsistant**

- ▶ Spécifications d'ordre supérieur (valide pour les modèles précédant)
 - ▶ Exemple : SARARMA(p,s,q)

$$Y = \sum_{i=1}^p \rho_i W_{Y,i} Y + \beta X + u$$

$$u = \sum_{j=1}^s \lambda_j W_{u,j} u + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^q \theta W_{\nu,k} \nu + \nu$$