

# Économétrie non-linéaire

## Chapitre 2: Modèles à changement de régime

Gilles de Truchis, Elena Dumitrescu

Master 2 BMM - EIPMC - GDA

Septembre 2016

# Les chapitres du cours

**1** Quelques faits stylisés

**2** Les modèles non-linéaires

**3** Stationnarité du SETAR

**4** Estimation

**5** Tests

**6** Application

# Plan

- |   |                           |   |             |
|---|---------------------------|---|-------------|
| 1 | Quelques faits stylisés   | 4 | Estimation  |
| 2 | Les modèles non-linéaires | 5 | Tests       |
| 3 | Stationnarité du SETAR    | 6 | Application |

# Non-linéarité stochastique

- Les séries économiques et financières exhibent bien souvent des comportements **non-linéaires**
- La non-linéarité peut prendre différentes formes...
  - soit déterministe (e.g. saisonnalité intra-hebdomadaire des marchés)
  - soit stochastique (e.g. régime de change / crise économique)
- ... et dépendre de variables
  - soit latentes (e.g. crise économique : de nombreux facteurs inobservés)
  - soit observées (e.g. régime de change : politique monétaire)
- Dans ce chapitre on s'intéresse aux cas de non-linéarités **stochastiques** déterminées par des **variables observées**

# Non-linéarité déterministe

Daily means and variances of stock index returns

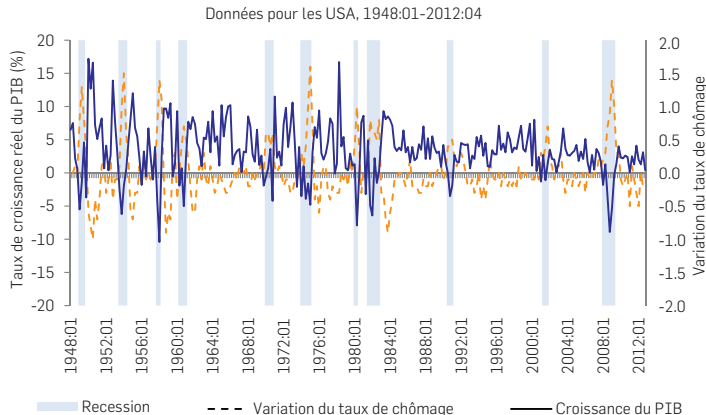
Stock market	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	St. err.
Daily means						
Amsterdam	- 0.061	0.089	0.145	0.009	0.010	0.045
Frankfurt	- 0.056	0.017	0.125	0.040	0.048	0.049
Hong Kong	- 0.142	0.109	0.217	- 0.041	0.142	0.068
London	- 0.083	0.076	0.095	0.038	0.079	0.037
New York	- 0.029	0.105	0.087	- 0.005	0.027	0.040
Paris	- 0.174	0.088	0.087	0.087	0.041	0.051
Singapore	- 0.089	0.034	0.063	0.032	0.056	0.040
Tokyo	- 0.160	0.032	0.070	0.103	- 0.020	0.054
Daily variances						
Amsterdam	2.013	1.087	1.313	1.082	0.875	0.218
Frankfurt	2.387	1.524	1.347	1.178	1.147	0.225
Hong Kong	5.895	2.214	2.312	2.177	1.651	1.232
London	1.030	0.943	0.730	0.732	0.768	0.172
New York	1.787	0.815	0.666	0.774	0.881	0.391
Paris	2.004	1.213	1.374	1.413	1.127	0.186
Singapore	1.852	0.841	0.785	0.856	0.751	0.213
Tokyo	2.286	1.994	1.780	1.487	1.617	0.273

Notes: Daily means of stock market returns (upper panel) and squared residuals from regression of returns on daily dummies (lower panel).

The sample period is 6 January 1986 until 31 December 1997, which equals 3,127 observations.

- Au niveau des rendements, on constate que tous les jours ne présentent pas les mêmes rendements moyens (effet lundi avec rendement négatifs en moyenne)
- Au niveau des variances, on observe également un effet lundi avec une volatilité plus importante des prix
- Il s'agit d'une forme de non-linéarité déterministe car même si la volatilité ou les rendements futures ne sont pas connus à l'avance, on observe une forme de saisonnalité et on peut prédire e.g. qu'au sein d'une semaine la variance des rendements sera plus élevée les lundis

# Non-linéarité stochastique et variables latentes

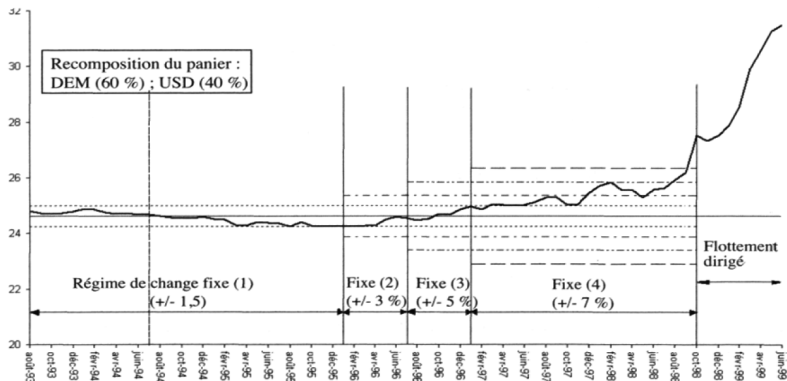


- L'évolution du taux de croissance ou du taux de chômage dépend de multiples facteurs et l'origine d'une récession ou d'une expansion dépend finalement d'un processus inobservé
- Dans le chapitre 3, nous verrons comment modéliser ce type de non-linéarité



# Non-linéarité stochastique et variables observées

## Taux de change de la couronne slovaque par rapport au panier de devises constitué du DEM et de l'USD



- L'évolution du taux de change effectif de la couronne Slovaque suit clairement une dynamique non-linéaire (je dirais qu'il y a un premier régime entre 93 et 97 puis un second entre 97 et fin 98 puis un troisième à partir de 99)
- La dynamique au sein de chaque régime est stochastique et les changements de régimes sont eux même stochastiques
- Néanmoins, on peut clairement attribuer les changement de régime à une variable observée : le régime de change (ou plus précisément les bandes de fluctuation du taux de change)

# Non-linéarité stochastique et variables observées

- Dans ce chapitre nous ferons donc l'hypothèse que
  - la variable d'intérêt  $Y_t$  possède une dynamique non-linéaire
  - cette dynamique non-linéaire dépend d'une variable observée

$$\mathbf{z}_t = \{z_t, z_{t-1}, \dots\}$$

- la variable  $\mathbf{z}_t$  étant observée, elle est considérée non-stochastique
  - $z_t$  est néanmoins une réalisation d'une variable aléatoire  $Z_t$
  - ⇒ c'est pourquoi il ne s'agit pas d'une non-linéarité déterministe
- la variable  $\mathbf{z}_t$  peut être l'endogène retardée :  $\mathbf{z}_t = y_{t-1}$

# Non-linéarité et équilibre

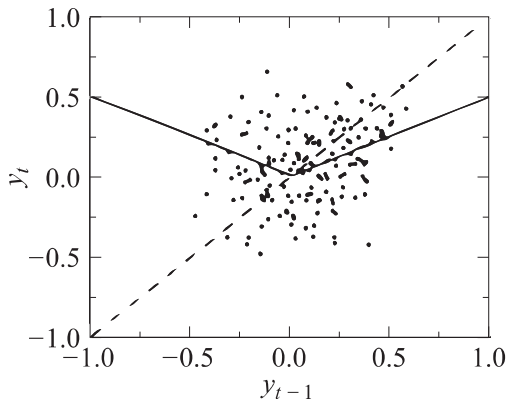
- Dans la terminologie de Chan et Tong (1985), si  $z_t = y_{t-1}$ 
  - la partie déterministe du modèle décrivant le lien entre  $Y_t$  et  $y_{t-1}$  caractérise le **squelette** du modèle
  - le modèle peut posséder un **équilibre** s'il existe  $y^* = F(y^*)$ , un **point fixe** du squelette
  - cet équilibre est **stable** si en l'absence de chocs,  $y_t \rightarrow y^*$
- Un processus **linéaire** stationnaire possède toujours un unique équilibre stable égale à sa moyenne

# Non-linéarité et équilibre

- Dans un cadre **non-linéaire**, un processus peut
  - posséder aucun, un ou plusieurs équilibres
  - posséder des équilibres stables ou instables
- Même en présence d'un unique équilibre stable, cet équilibre n'est pas forcément égale à la moyenne du processus
- Un équilibre stable est un **attracteur** :  $y_t$  est attiré vers  $y^*$
- En présence d'équilibres multiples, plusieurs attracteurs peuvent co-exister
  - on dira que  $y^*$  est un attracteur de  $y_t$  si  $y_t$  est dans le bassin d'attraction de  $y^*$

# Attracteurs

- Illustration :  $y_t$  possède une dépendance non-linéaire à  $y_{t-1}$

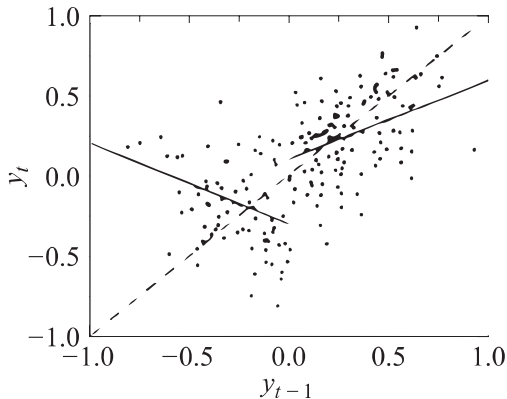


(a)

- Dans un cadre linéaire, ce nuage de points laisserait penser qu'il n'y a pas de corrélation entre  $y_t$  et  $y_{t-1}$
- Ici il s'agit en réalité d'une simulation d'un modèle non-linéaire dont les deux régimes et (plus précisément leurs squelettes) sont représentés par les droites en trait plein
- Dans cette spécification, les moyennes intra-régime sont nulles ce qui explique que les droites se rejoignent en un même point sur la première bissectrice
- Ce point représente l'unique équilibre du processus : il s'agit d'un équilibre stable

# Attracteurs

- Illustration :  $y_t$  possède une dépendance non-linéaire à  $y_{t-1}$



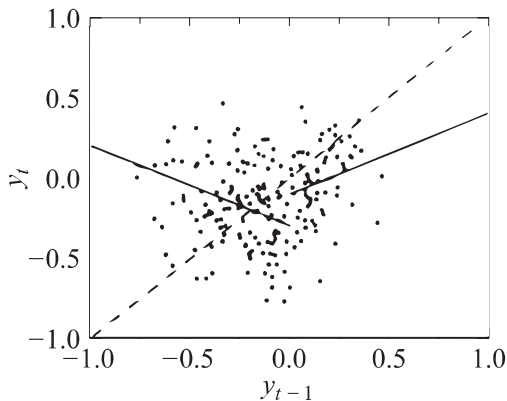
(b)



- A la différence du nuage précédent, on voit immédiatement qu'il existe au moins deux régimes dans la relation entre  $y_t$  et  $y_{t-1}$
- Les deux nuages de points sont assez distincts et leurs formes révélatrices d'une corrélation moyenne négative dans un régime et positive dans l'autre
- Ici il s'agit en effet d'une simulation d'un modèle non-linéaire dont les deux régimes sont représentés par les droites en trait plein
- Sans surprise, dans cette spécification, l'une des moyennes intra-régime est négative et l'autre est positive
- Les intersections avec la première bissectrice représentent les équilibres stables : ici il existe donc deux équilibres stables distincts
- En effet, la première bissectrice représente  $y_t = y_{t-1}$  et  $y_t = F(y_{t-1})$  représente les segments de droite autour d'une discontinuité dont on verra plutard qu'elle correspond à un seuil  $c$  : on voit alors aisément que les intersections des segments avec la première bissectrice sont des points fixes car  $y_{t-1} = F(y_{t-1})$

# Attracteurs

- Illustration :  $y_t$  possède une dépendance non-linéaire à  $y_{t-1}$



(c)

- Tout comme le nuage précédent, on voit assez clairement qu'il existe au moins deux régimes dans la relation entre  $y_t$  et  $y_{t-1}$
- Les deux nuages de points sont assez distincts et leurs formes révélatrices d'une corrélation moyenne négative dans un régime et positive dans l'autre (forme d'une équerre)
- Néanmoins, ce processus ne possède qu'un unique équilibre stable
- On voit en effet que seul l'un des deux traits pleins coupe la première bissectrice
- En l'absence de chocs, même si  $y_t$  se trouve dans le régime positif, il aura tendance à tomber dans le bassin d'attraction du régime négatif - Le régime positif est donc transitoire

# Fluctuations endogènes

- Dans l'hypothèse où pour aucun des régimes il existe un point  $y^*$  tel que  $y^* = F(y^*)$

- le processus n'a aucun équilibre stable

- Le modèle peut cependant posséder un attracteur

- cela va engendrer un **cycle limite**

- Un cycle limite est une orbite de période  $k$

⇒ un ensemble de points  $y_1^*, \dots, y_k^*$  tel que

$$y_j^* = F(y_{j-1}^*), \quad j = 2, \dots, k, \quad y_1^* = F(y_k^*)$$

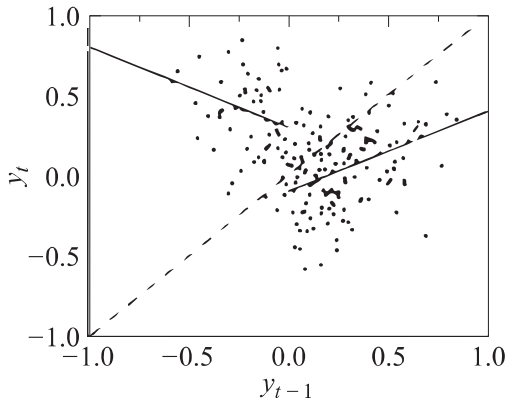
- En l'absence de chocs, si le cycle limite est stable,  $y_t$  va converger sur cette orbite et fluctuer autour de l'attracteur

- ainsi, même en absence de chocs,  $y_t$  possède une dynamique

⇒ on parle de **fluctuations endogènes**

# Attracteurs

- Illustration :  $y_t$  possède une dépendance non-linéaire à  $y_{t-1}$



(d)

- Tout comme le nuage précédent, on voit clairement qu'il existe au moins deux régimes dans la relation entre  $y_t$  et  $y_{t-1}$
- Les deux nuages de points sont distincts et leurs formes révélatrices d'une corrélation moyenne négative dans un régime et positive dans l'autre
- Néanmoins, ce processus ne possède aucun équilibre stable
- On voit en effet qu'aucun trait plein coupe la première bissectrice
- En l'absence de chocs, si  $y_t$  se trouve dans le régime positif, il aura tendance à tomber dans le bassin d'attraction du régime négatif
- En l'absence de chocs, si  $y_t$  se trouve dans le régime négatif, il aura tendance à tomber dans le bassin d'attraction du régime positif
- Les deux régimes sont donc transitoires et ne convergent vers aucun équilibre stable mais  $y_t$  fluctue autour d'un attracteur et on parle de cycle limite

# Plan

- |   |                           |   |             |
|---|---------------------------|---|-------------|
| 1 | Quelques faits stylisés   | 4 | Estimation  |
| 2 | Les modèles non-linéaires | 5 | Tests       |
| 3 | Stationnarité du SETAR    | 6 | Application |

# Le modèle TAR

- Tong (1990) introduit les modèles autorégressifs à seuil

⇒ **Threshold AutoRegressive (TAR)**

- Dans ce type de modèle, le régime est déterminé par une valeur seuil notée  $c$
- Selon la variable observée  $z_t$  on a alors

$$y_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_t \leq c \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_t > c \end{cases} \quad (1)$$

- On fait ici l'hypothèse que  $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2)$
- Spécificité du modèle : la **transition** d'un régime à l'autre est **abrupte**



on parle d'une linéarité par morceaux de la fonction de transition.

En d'autres termes, dans cette perspective il existe plusieurs processus générateurs chacun s'appliquant à un sous-échantillon.

Comme rappelé plus haut, si les dates auxquelles se produisent les sauts sont connues alors la modélisation peut s'effectuer simplement par prise en considération de variables indicatrices. On peut toutefois envisager que l'événement responsable du changement de régime n'est pas simplement observé sur l'échelle des temps mais qu'il peut être signalé par une autre variable, dite variable de transition, supposée exogène.

Le réel inconnu  $c$  qui coupe le support de  $z_t$  en 2 est le paramètre de seuil  
the threshold variable  $z_t$  may be one of the components of the explanatory  
variables matrix  $x_t$ , which in this case is simply  $y_{t-1}$  or some external  
variable, so a threshold regression comes down to a threshold autoregression  
here  $x_t = y_{t-1}$

# Le modèle SETAR

- Une spécification possible du TAR consiste à choisir  $z_t = y_{t-k}$ ,  $k > 0$
- On parle alors de modèle modèles auto-excité autorégressif à seuil

⇒ **Self-Exciting Threshold AutoRegressive (SETAR)**

- Pour  $z_t = y_{t-1}$  on obtient alors

$$y_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } y_{t-1} \leq c \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } y_{t-1} > c \end{cases} \quad (2)$$

- Écriture alternative à l'aide de la fonction indicatrice  $\mathbb{1}(\cdot)$  :

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - \mathbb{1}(y_{t-1} > c)) \\ + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})\mathbb{1}(y_{t-1} > c) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2) \quad (3)$$

la fonction  $\mathbb{1}(A)$  vaut 1 si l'événement  $A$  survient et vaut 0 sinon

# Le modèle STAR

- La transition d'un régime à l'autre dans les modèles TAR et SETAR est abrupte
- Il existe cependant des modèles à transition souple

⇒ **Smooth Transition AutoRegressive (STAR)**

- Dans ces modèles, la fonction  $\mathbb{1}(\cdot)$  est remplacée par une fonction continue généralement sigmoïde

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - G(z_t; \gamma, c)) \\ + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})G(z_t; \gamma, c) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2) \quad (4)$$

- on peut également considérer que  $z_t = y_{t-k}$ , i.e. self-exciting, ou que  $z_t = t$ , i.e. les paramètres connaissent une transition lisse (Lin et Terasvirta, 1994)
- il y a un continuum de regimes entre 0 et 1 associés avec différentes valeurs de la fonction G.
- et le choix de la fonction G en elle même conduit à différents types de comportement de changement de régime

# Fonction de transition logistique

- Bien souvent, la fonction logistique est utilisée

$$G(z_t; \gamma, c) = \frac{1}{1 + \exp(-\gamma(z_t - c))} \quad (5)$$

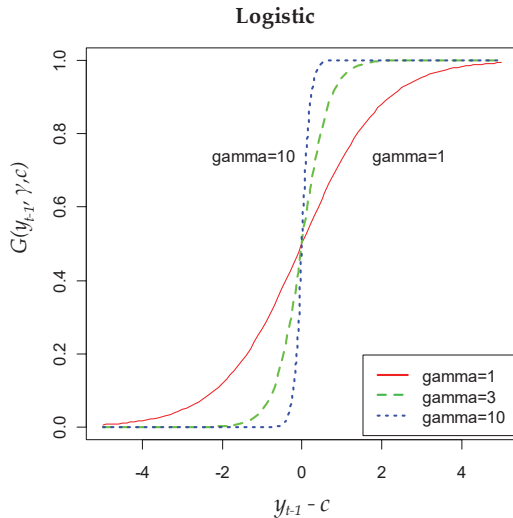
- On parle alors de **Logistic STAR (LSTAR)**
- Dans un modèle LSTAR les deux régimes correspondent à des valeurs faibles et élevées de la variable de transition  $z_t$  relativement à  $c$

# Fonction de transition logistique

- $c$  est un paramètre de seuil entre les régimes  $G(z_t; \gamma, c) = 0$  et  $G(z_t; \gamma, c) = 1$ 
  - en effet la fonction est monotone entre 0 et 1 quand  $z_t$  augmente
- $\gamma$  est un paramètre de “souplesse” (i.e. de lissage) de  $G(\cdot)$  :
  - si  $\gamma$  est petit, la transition est très douce
  - si  $\gamma$  est grand, la transition est très abrupte
  - si  $\gamma = 0$ ,  $G(z_t; \gamma, c) = 0.5$
  - si  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $G(z_t; \gamma, c) = \mathbb{1}(z_t > c)$

- Le TAR et le SETAR apparaissent donc comme des cas particuliers des modèles STAR — pour  $\gamma \rightarrow \infty$  et  $z_t = y_t$  dans le 2eme cas
- par ailleurs, le modèle LSTAR revient à un modèle linéaire lorsque  $\gamma = 0$

# Fonction de transition logistique





- ce type de modèle peut être utilisé pour la modélisation des business cycles ; si  $y_t$  est le taux de croissance du PIB et la fonction de transition est le taux de croissance de la période précédente, avec  $c = 0$ , le modèle identifie les périodes de croissance positive et négative, i.e. les expansions et les récessions :  $z_t = \Delta y_{t-1}$  et  $c = 0$

# Fonction de transition exponentielle

- La fonction exponentielle

$$G(z_t; \gamma, c) = 1 - \exp(-\gamma(z_t - c)^2) \quad (6)$$

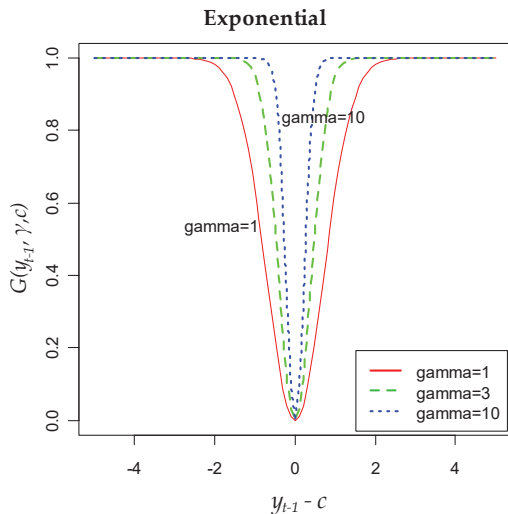
permet de considerer des regimes associés avec des **valeurs absolues** faibles et importantes de la variable de transition

- On parle alors de **Exponential STAR (ESTAR)**
- si  $z_t \rightarrow \infty$  ou  $z_t \rightarrow -\infty$ , alors  $G(z_t; \gamma, c) \rightarrow 1$
- si  $z_t = c$ ,  $G(z_t; \gamma, c) = 0$
- si  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $G(z_t; \gamma, c) \rightarrow 0$  et si  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $G(z_t; \gamma, c) \rightarrow 1$  (modèle linéaire)

- une autre fonction de transition connue, utile pour l'analyse du taux de change d'équilibre. Plus précisément, le comportement du taux de change dépend de son écart par rapport à la PPA. Dès lors que le taux de change s'éloigne trop dans un sens ou dans un autre (dépasse un certain intervalle), il va être forcé de revenir vers le régime d'équilibre car l'arbitrage devient profitable ; mais dans le régime du milieu il n'y a pas de retour à l'équilibre.

- A noter aussi, que les modèles STAR (LSTAR ou ESTAR) ne peuvent pas permettre plus de deux régimes, indépendamment de la forme de la fonction de transition!!!

# Fonction de transition exponentielle



# Simulations d'un SETAR

- Les SETAR et les STAR peuvent générer des dynamiques riches
- Pour s'en rendre compte, simulons un SETAR pour 4 spécifications,

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - \mathbb{1}(y_{t-1} > c)) \\ + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})\mathbb{1}(y_{t-1} > c) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2)$$

avec  $\phi_{1,1} = -0.5$ ,  $\phi_{1,2} = 0.5$ ,  $c = 0$  et

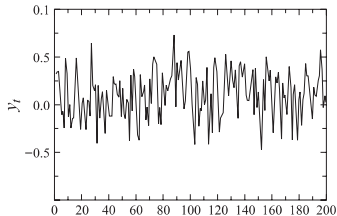
M1  $\phi_{0,1} = 0$ ,  $\phi_{0,2} = 0$ ,

M2  $\phi_{0,1} = -0.3$ ,  $\phi_{0,2} = 0.1$

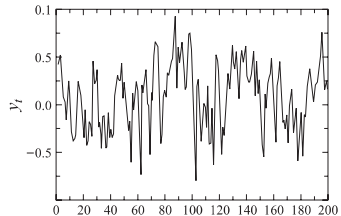
M3  $\phi_{0,1} = -0.3$ ,  $\phi_{0,2} = -0.1$

M4  $\phi_{0,1} = 0.3$ ,  $\phi_{0,2} = -0.3$

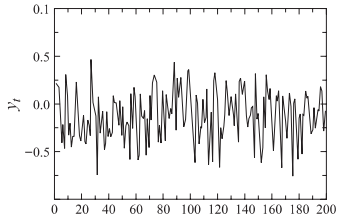
# Réalisations



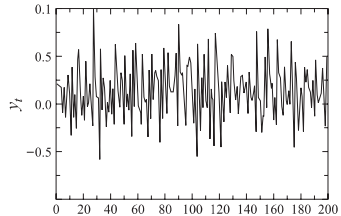
(a)  $\phi_{0,1} = 0, \phi_{0,2} = 0$



(b)  $\phi_{0,1} = -0.3, \phi_{0,2} = 0.1$



(c)  $\phi_{0,1} = -0.3, \phi_{0,2} = -0.1$



(d)  $\phi_{0,1} = 0.3, \phi_{0,2} = -0.3$

# Squelette d'un SETAR

- Le **squelette** du modèle est donné par  $\mathbb{E}(y_t | \mathbf{y}^{t-1})$  en  $t - 1$

$$F(y_{t-1}) = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - \mathbb{1}(y_{t-1} > c)) + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})\mathbb{1}(y_{t-1} > c)$$

avec  $\mathbf{y}^{t-1} = (y_{t-1}, \dots, y_1)$  l'information passée

- On voit aisément que  $F(y_{t-1})$  décrit l'équation d'une courbe discontinue en  $y_{t-1} = c$
- Souvenez-vous, ce modèle a un (plusieurs) équilibre(s) s'il existe un (plusieurs) point(s) fixe(s)  $y^*$  tel(s) que

$$y^* = F(y^*)$$

- Cet équilibre est stable si  $y_t$  converge vers  $y^*$  quand  $\varepsilon_t = 0$

# Équilibres d'un SETAR

- Pour chaque modèle, on peut calculer le ou les équilibres

M1  $F(y_{t-1}) = -0.5y_{t-1}\mathbb{1}(y_{t-1} < c) + 0.5y_{t-1}\mathbb{1}(y_{t-1} > c)$

⇒ chaque segment de  $F(y_{t-1})$  coupe la première bissectrice en un même point

⇒ i.e. en  $y_1^* = y_2^* = y^* = 0$

M2  $F(y_{t-1}) = (-0.3 - 0.5y_{t-1})\mathbb{1}(y_{t-1} < c) + (0.1 + 0.5y_{t-1})\mathbb{1}(y_{t-1} > c)$

⇒ le segment 1 coupe la première bissectrice en  $y_1^* = -0.2$

⇒ le segment 2 coupe la première bissectrice en  $y_2^* = 0.2$

M3  $F(y_{t-1}) = (-0.3 - 0.5y_{t-1})\mathbb{1}(y_{t-1} < c) + (-0.1 + 0.5y_{t-1})\mathbb{1}(y_{t-1} > c)$

⇒ le segment 1 coupe la première bissectrice en  $y_1^* = -0.2$

⇒ le segment 2 devrait couper la première bissectrice en  $(-0.2; -0.2)$

... mais ce point existe si  $c > 0$  : il n'y a donc pas d'équilibre

M4  $F(y_{t-1}) = (0.3 - 0.5y_{t-1})\mathbb{1}(y_{t-1} < c) + (-0.3 + 0.5y_{t-1})\mathbb{1}(y_{t-1} > c)$

⇒ pour les segments 1 et 2 on devrait avoir :  $(0.2; 0.2)$  et  $(-0.6; -0.6)$

... mais ces segments n'existent que si  $c < 0$  et  $c > 0$ , respectivement

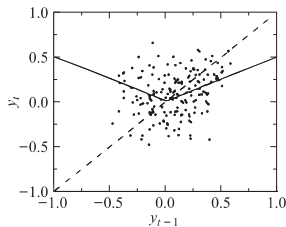
⇒ il existe cependant un cycle limite de période 3 :

$$(y_1^* = 0.06667, y_2^* = -0.06667, y_3^* = 0.33333)$$

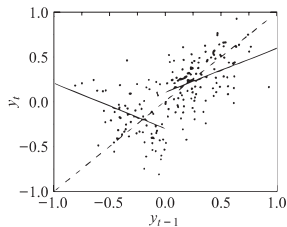


- En gros c'est assez simple : il existe un point fixe (i.e. un équilibre) si  $y^* = F(y^*)$
- Il suffit donc de regarder si  $F(y^*)$  coupe la première bissectrice de chaque côté de la discontinuité en  $c$  - Si  $F(y^*)$  ne coupe jamais la première bissectrice l'analyse se complique comme dans le cas M4 et on explique juste aux étudiants que ça génère des fluctuations endogènes même en absence de chocs mais on leur explique pas comment analyser les périodes orbitales
- La présence d'un cycle limite me semble important car cela décrit une réalité économique ou financière particulière
- Par exemple, en macroéconomie, cela veut dire que le système étudié oscille en permanence et qu'il existe de la volatilité macro ce qui est généralement néfaste pour l'économie
- Exemple de résolution avec M2 : on a un système formé des équations  $y_t = -0.3 - 0.5y_{t-1}$  et  $y_t = y_{t-1}$  et on le résoud en remplaçant  $y_t$  par  $y_{t-1}$  dans la première équation ce qui donne  $y_{t-1} = y^* = -0.3/1.5 = -0.2...$  en faisant la même chose avec le deuxième segment du squelette on obtient  $y_{t-1} = y^* = 0.2$

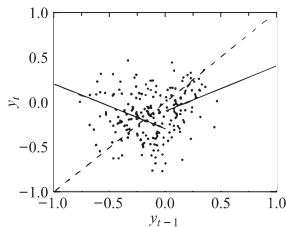
# Nuages de points



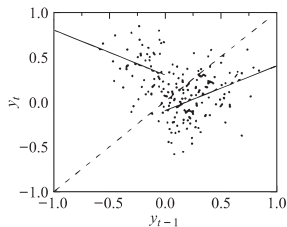
(a)  $\phi_{0,1} = 0, \phi_{0,2} = 0$



(b)  $\phi_{0,1} = -0.3, \phi_{0,2} = 0.1$



(c)  $\phi_{0,1} = -0.3, \phi_{0,2} = -0.1$



(d)  $\phi_{0,1} = 0.3, \phi_{0,2} = -0.1$

# Modèles d'ordres autorégressifs élevés

- Les modèles STAR ou SETAR sont basés sur l'endogène retardée
- Pour un SETAR à  $p$  retards on obtient

$$y_t = (\phi_{0,1} + \sum_k^{p_1} \phi_{k,1} y_{t-k})(1 - \mathbb{1}(y_{t-l} > c)) \\ + (\phi_{0,2} + \sum_k^{p_2} \phi_{k,2} y_{t-k}) \mathbb{1}(y_{t-l} > c) + \varepsilon_t$$

- Pour un STAR à  $p$  retards on obtient

$$y_t = (\phi_{0,1} + \sum_k^{p_1} \phi_{k,1} y_{t-k})(1 - G(y_{t-l}; \gamma, c)) \\ + (\phi_{0,2} + \sum_k^{p_2} \phi_{k,2} y_{t-k}) G(y_{t-l}; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

- Dans la plupart des cas on choisira  $l = 1$  mais  $l > 1$  est possible

# Modèles d'ordres autorégressifs élevés

- L'analyse analytique des équilibres devient complexe si  $p \geq 2$
- Il est néanmoins possible de procéder à des simulations
  - On calcule l'expression du squelette
  - On tire aléatoirement des valeurs initiales pour  $y_0, y_{-1}, \dots, y_{1-\max(p_1, p_2)}$
  - On utilise le squelette pour générer  $y_1, \dots, y_n$
  - On répète cette simulation un grand nombre de fois
- Cela permet d'avoir une idée des caractéristiques du squelette du modèle numériquement

# Modèles multi-régimes

- Il existe deux manières de considérer plus que 2 régimes

1) en augmentant le nombre de seuils

⇒ pour  $m$  régimes il faut définir  $m + 1$  seuils

$$\mathbf{c} = (c_0 < \cdots < c_j < \cdots < c_m)'$$

avec le régime  $j$  donné dans le cas d'un SETAR par

$$y_t = \phi_{0,j} + \phi_{1,j}y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{si } c_{j-1} < y_{t-1} \leq c_j$$

2) en augmentant le nombre de variables interagissant avec le seuil

⇒ par exemple en considérant  $y_{t-1}$  et  $y_{t-2}$  on obtient 4 régimes

$$y_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } y_{t-1} \leq c_1 \text{ et } y_{t-2} \leq c_2 \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } y_{t-1} \leq c_1 \text{ et } y_{t-2} > c_2 \\ \phi_{0,3} + \phi_{1,3}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } y_{t-1} > c_1 \text{ et } y_{t-2} \leq c_2 \\ \phi_{0,4} + \phi_{1,4}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } y_{t-1} > c_1 \text{ et } y_{t-2} > c_2 \end{cases}$$

# Modèles multi-régimes

- Pour le STAR, commençons par réécrire le cas à 2 régimes

$$y_t = \phi_1' x_t + (\phi_2 - \phi_1)' x_t G(y_{t-1}; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

avec  $x_t = (1, y_{t-1})'$  et  $\phi_j = (\phi_{0,j}, \phi_{1,j})'$  pour  $j = 1, 2$

- 1 Dans le cas de  $m$  régimes et  $m - 1$  seuils, cette réécriture donne

$$y_t = \phi_1' x_t + \sum_{j=2}^m (\phi_j - \phi_{j-1})' x_t G(y_{t-1}; \gamma_{j-1}, c_{j-1}) + \varepsilon_t$$

- 2 Dans le cas de 2 variables de seuils, cette réécriture donne

$$\begin{aligned} y_t = & \left( \phi_1' x_t (1 - G_1(y_{t-1})) + \phi_2' x_t G_1(y_{t-1}) \right) (1 - G_2(y_{t-2})) \\ & + \left( \phi_3' x_t (1 - G_1(y_{t-1})) + \phi_4' x_t G_1(y_{t-1}) \right) G_2(y_{t-2}) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

avec  $G_j(y_{t-1}) = G(y_{t-1}; \gamma_j, c_j)$

# Plan

- |   |                           |   |             |
|---|---------------------------|---|-------------|
| 1 | Quelques faits stylisés   | 4 | Estimation  |
| 2 | Les modèles non-linéaires | 5 | Tests       |
| 3 | Stationnarité du SETAR    | 6 | Application |

# Stationnarité

- Les conditions de stationnarité du SETAR sont peu connues
  - Chan et al. (1985) : le SETAR est stationnaire si une des conditions suivantes est satisfaite
    - (1)  $\phi_{1,1} < 1, \phi_{1,2} < 1, \phi_{1,1}\phi_{1,2} < 1$
    - (2)  $\phi_{1,1} = 1, \phi_{1,2} < 1, \phi_{0,1} > 0$
    - (3)  $\phi_{1,1} < 1, \phi_{1,2} = 1, \phi_{0,2} < 0$
    - (4)  $\phi_{1,1} = 1, \phi_{1,2} = 1, \phi_{0,2} < 0 < \phi_{0,1}$
    - (5)  $\phi_{1,1}\phi_{1,2} = 1, \phi_{1,1} < 0, \phi_{0,2} + \phi_{1,2}\phi_{0,1} > 0$
  - La condition (1) est standard mais (2), (3) et (4) sont originales
    - Elles autorisent de la non-stationnarité intra-régime, éventuellement dans les deux régimes simultanément
    - Les conditions sur les constantes sont telles que  $y_t$  revient vers le régime stationnaire
- ⇒ non-stationnarité locale mais stationnarité globale



# Stationnarité du STAR

- Les conditions de stationnarité du STAR sont complexes
- Dijk et Teräsvirta (2002) rappellent que le STAR est localement stationnaire si
  - les valeurs de  $G(y_{t-1}, \gamma, c)$  et de  $\phi_{1,j}$  sont telles que les racines du polynôme

$$1 - \sum_{j=1}^p \left( \phi_{1,j} (1 - G(y_{t-1}, \gamma, c)) + \phi_{2,j} G(y_{t-1}, \gamma, c) \right) L^j$$

sont, en module, en dehors du cercle unitaire (avec  $y_t L^j = y_{t-j}$ )

# Plan

- |   |                           |   |             |
|---|---------------------------|---|-------------|
| 1 | Quelques faits stylisés   | 4 | Estimation  |
| 2 | Les modèles non-linéaires | 5 | Tests       |
| 3 | Stationnarité du SETAR    | 6 | Application |

# Estimation des modèles SETAR

- L'estimation des SETAR est plutôt simple

⇒ malgré la non-linéarité du modèle, les OLS sont appropriés

- Si on suppose  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , comme pour le cas linéaire, l'approche OLS est équivalente au MLE
- Dans le cas d'un SETAR à 2 régimes, les paramètres d'intérêt sont
  - $\phi_{i,j}$ , pour  $i = 0, \dots, p$  et  $j = 1, 2$
  - le paramètre de seuil  $c$
  - la variance du terme d'erreur  $\sigma^2$
- On dénotera  $\theta \in \Theta$  le vecteurs des paramètres

# Estimation des modèles SETAR

- Mais pourquoi les OLS sont-ils adaptés ?
- Pour comprendre, réécrivons le SETAR

$$y_t = \phi'_1 x_t \mathbf{1}(z_t \leq c) + \phi'_2 x_t \mathbf{1}(z_t > c) + \varepsilon_t$$

avec  $\phi'_j = (\phi_{0,j}, \dots, \phi_{p,j})'$  pour  $j = 1, 2$  et  $x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$

- Or, pour une valeur de  $c$  donnée, le modèle est linéaire en  $\theta \setminus \{c\}$
- Pour  $c$  donné, l'estimation de  $\phi = (\phi'_1, \phi'_2)$  par OLS :

$$\hat{\phi}(c) = \left( \sum_{t=1}^n x_t(c) x_t(c)' \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^n x_t(c) y_t \right)$$

avec  $x_t(c) = (x'_t \mathbf{1}(z_t \leq c), x'_t \mathbf{1}(z_t > c))'$

# Estimation des modèles SETAR

- Toujours pour une valeur de  $c$  fixée, la variance est donnée par

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t(c)^2$$

avec  $\hat{\varepsilon}_t(c) = y_t - \hat{\phi}(c)'x_t(c)$

- On peut ensuite estimer  $c$  en minimisant la variance des résidus

$$\hat{c} = \arg \min_{c \in C} \sigma^2(c)$$

où  $C \in \Theta$  contient les valeurs admissibles pour  $c$

- Il s'agit d'une estimation séquentielle dont l'estimation finale est donnée par  $\hat{\phi} = \hat{\phi}(\hat{c})$  et  $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(\hat{c})$
- On parle aussi d'OLS **conditionnels**

# Estimation des modèles SETAR

- Comment choisir la grille  $C$  pour le paramètre  $c$  ?
- $C$  doit être tel que chaque régime contient suffisamment d'observations
- e.g. on va exiger que chaque régime contienne au moins une fraction  $\pi_0$  des observations

$$C = \{c | z_{([\pi_0(n-1)])} \leq c \leq z_{([(1-\pi_0)(n-1)])}\}$$

avec  $z_{(0)}, \dots, z_{(n-1)}$  la statistique d'ordre de la variable de seuil  $z_t$ , i.e.  $z_{(0)} \leq \dots \leq z_{(n-1)}$  et  $[.]$  l'opérateur *partie entière*.

- Il ressort de la littérature qu'un bon choix pour  $\pi_0$  est  $\pi_0 = 0.15$

Rappel : la statistique d'ordre de rang  $k$  d'une variable  $z_t$  est la  $k$ -ième plus petite valeur de l'échantillon

# Estimation des modèles SETAR

- Qu'en est-il de la théorie asymptotique des OLS conditionnels
- Chan (1993) montre que l'estimateur LS de  $c$  est
  - consistant et converge au taux  $n$
  - asymptotiquement indépendant des autres paramètres
- Hansen (1997) dérive la distribution limite de  $c$  et montre que
  - $\theta \setminus \{c\}$  est consistant et converge au taux  $\sqrt{n}$
  - $\theta \setminus \{c\}$  est asymptotiquement normalement distribué



## Rappel : Moindres Carrés Non Linéaires

- L' estimateur NLS  $\hat{\theta}$  est défini comme la valeur de  $\theta$  qui minimise la somme de carrées des résidus :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} Q_n(\theta) = \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^n (y_t - F(x_t; \theta))' (y_t - F(x_t; \theta))$$

- Les conditions de premier ordre

$$\nabla_{\theta} Q_n(\theta) = -\frac{2}{n} \nabla_{\theta} F(x_t; \theta) [y - F(x_t; \theta)]' = 0 \quad (7)$$

- Hypothèse d'identification
  - i)  $F(x; \theta)$  est continue et deux fois dérivable par rapport à  $\theta$  tel que  $\nabla_{\theta}^2 Q_n(\theta)$  est définie positive pour des points intérieurs à  $\Theta$
- Dans une régressions linéaire,  $\nabla_{\theta} F(\theta) = x'$ ,  $\nabla_{\theta}^2 F(\theta) = 0$ . Ainsi  $\nabla_{\theta}^2 Q_n(\theta) = 2(x'x)/n$  et elle est définie positive si  $x$  est de plein rang.

## Rappel : Moindres Carrés Non Linéaires

- Contrairement aux OLS, la solution de l'optimisation NLS n'a pas de forme analytique car les CPO constituent un système d'équations non-linéaires en général.
- L'algorithme d'optimisation suit les mêmes étapes que pour le MLE (cf. chapitre 1, e.g. l'algorithme Newton-Raphson)
- L'estimateur NLS est convergent

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta^*$$

- L'estimateur NLS est asymptotiquement normalement distribué

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^*) \xrightarrow{d} N(0, \Xi),$$

avec  $\Xi = I_n(\theta)^{-1} J_n(\theta) I_n(\theta)^{-1}$  la matrice de variance-covariance asymptotique de l'estimateur NLS

# Estimation des modèles STAR

- Commençons par réécrire le STAR

$$y_t = \phi_1' x_t (1 - G(z_t, \gamma, c)) + \phi_2' x_t G(z_t, \gamma, c) + \varepsilon_t$$

avec  $\phi_j' = (\phi_{0,j}, \dots, \phi_{p,j})'$  pour  $j = 1, 2$  et  $x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$

- Les paramètres d'intérêt sont toujours  $\theta = (\phi_1', \phi_2', \gamma, c)'$
- Pour  $\gamma$  et  $c$  fixés, le STAR est linéaire en  $\theta \setminus \{\gamma, c\}$ 
  - Une estimation séquentielle par OLS est donc possible

$$\hat{\phi}(\gamma, c) = \left( \sum_{t=1}^n x_t(\gamma, c) x_t(\gamma, c)' \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^n x_t(\gamma, c) y_t \right) \quad (8)$$

- L'estimation de  $\gamma$  et  $c$  est fastidieuse car il faut itérer sur une grille bidimensionnelle afin de trouver  $(\gamma, c)$  qui minimise  $\sigma^2(\gamma, c)$

- Je suis pas certain pour les OLS... j'ignore s'il y a des résultats théoriques sur la distribution de  $\gamma$  et  $c$ ...

# Estimation des modèles STAR

- On peut aussi appliquer les moindres carrés non-linéaires (NLS)

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} Q_n(\theta) = \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^n (y_t - F(x_t; \theta))^2$$

$$\text{avec } F(x_t; \theta) = \phi'_1 x_t (1 - G(z_t, \gamma, c)) + \phi'_2 x_t G(z_t, \gamma, c)$$

- Potscher et Prucha (1997) montrent que  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(0, \Xi)$

# Estimation des modèles STAR

- On peut estimer  $\Xi$  par  $\hat{A}_n^{-1}\hat{B}_n\hat{A}_n^{-1}$  sachant que

$$\begin{aligned}\hat{A}_n &= -n^{-1} \sum_{t=1}^n \nabla^2 q_t(\hat{\theta}) \\ &= n^{-1} \sum_{t=1}^n (\nabla F(x_t; \hat{\theta}) \nabla F(x_t; \hat{\theta})' - \nabla^2 F(x_t; \hat{\theta}) \hat{\varepsilon}_t) \\ \hat{B}_n &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \nabla q_t(\hat{\theta}) \nabla q_t(\hat{\theta})' \\ &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 \nabla F(x_t; \hat{\theta}) \nabla F(x_t; \hat{\theta})'\end{aligned}$$

avec  $q_t(\hat{\theta}) = (y_t - F(x_t; \hat{\theta}))^2$  et  $\nabla F(x_t; \hat{\theta}) = \partial F(x_t; \hat{\theta}) / \partial \theta$

# Estimation des modèles STAR

- Le problème d'optimisation des NLS n'est pas si simple
  - Il existe des solutions pour faciliter la tâche des algorithmes
    - Initialiser l'algorithme d'optimisation à l'aide des OLS
    - Concentrer la fonction objectif par rapport à  $\phi_1$  et  $\phi_2$
- ⇒ réécrire la fonction objectif afin d'estimer uniquement  $\gamma$  et  $c$   
... on peut ensuite calculer algébriquement les valeurs de  $\phi_1$  et  $\phi_2$

$$Q_n(\gamma, c) = \sum_{t=1}^n (y_t - \phi(\gamma, c)'x_t(\gamma, c))^2$$

avec  $\phi(\gamma, c)$  donné par (8)

# Estimation des modèles STAR

- Les difficultés d'estimation concernent généralement  $\gamma$ 
  - pour des valeurs élevés de  $\gamma$ ,  $G(z_t, \gamma, c)$  ne varie presque pas
  - en conséquence,  $\gamma$  ne doit pas être interprété trop précisément
  - de plus, même si  $\gamma$  n'est pas significatif, cela ne correspond pas forcément à un rejet du modèle non-linéaire



# Plan

- |   |                           |   |             |
|---|---------------------------|---|-------------|
| 1 | Quelques faits stylisés   | 4 | Estimation  |
| 2 | Les modèles non-linéaires | 5 | Tests       |
| 3 | Stationnarité du SETAR    | 6 | Application |

# Tests d'hypothèses

- 1) Tests de linéarité
- 2) Tests de mauvaise spécification

# Test de linéarité versus TAR

## TAR

$$y_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_t \leq c \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_t > c \end{cases} \quad (9)$$

$H_0 : \phi_{0,1} = \phi_{0,2} \text{ et } \phi_{1,1} = \phi_{1,2}$

$H_1 : \phi_{0,1} \neq \phi_{0,2} \text{ et/ou } \phi_{1,1} \neq \phi_{1,2}$

$$\blacksquare \text{Stat}(\hat{c}) = n \frac{\tilde{\sigma}_n^2 - \hat{\sigma}_n^2(\hat{c})}{\hat{\sigma}_n^2(\hat{c})},$$

avec  $\tilde{\sigma}_n^2$  l'estimateur de la variance des résidus sous  $H_0$  de linéarité ( $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + e_t$ ) et  $\hat{\sigma}_n^2(\hat{c})$  est l'estimateur de la variance des résidus sous l'alternative du TAR  $\hat{\sigma}_n^2(\hat{c}) = \hat{\sigma}_{n,1}^2(\hat{c}) + \hat{\sigma}_{n,2}^2(\hat{c})$ .

Or le seuil  $c$  n'est pas identifiable sous  $H_0$ . De ce fait la distribution de  $F(\hat{c})$  est non-standard et les valeurs critiques sont obtenues par simulation. (cf. Hansen, 1997, 2000 pour plus de détails).

eg. Fqn Yao pg 139 H0 : AR(2) H1 :TAR avec 2 regimes et l'ordre du processus autoreg est p1=p2= d (le retard qui représente la var de transition) = 2 n=114  $\hat{\sigma}_0^2=0.0586$   $\hat{\sigma}(\hat{c})^2=0.0441$  Stat

$Stat(\hat{c}) = (n - 2) \frac{\hat{\sigma}_0^2 - \hat{\sigma}_n^2(\hat{c})}{\hat{\sigma}_n^2(\hat{c})} = 36.825$  Valeurs critiques simulées, en supposant que le seuil c est compris dans un intervalle fermé  $I_r = 90\%$  On rejette H0 d'AR(2) linéaire même à 10%

order $p$	10%	5%	2.5%	1%	0.1%
0	7.61	9.21	10.77	12.80	17.75
1	11.05	12.85	14.55	16.72	21.94
2	13.26	15.18	16.98	19.25	24.69
3	15.30	17.31	19.19	21.57	27.20
4	17.22	19.32	21.28	23.73	29.54
5	19.05	21.23	23.26	25.79	31.77
6	20.82	23.07	25.16	27.77	33.90
9	25.84	28.30	30.55	33.36	39.90
12	30.58	33.20	35.61	38.59	45.49

# Test de linéarité versus STAR

## STAR

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - G(z_t; \gamma, c)) + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})G(z_t; \gamma, c) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2) \quad (10)$$

- $H_0 : \phi_{0,1} = \phi_{0,2} \text{ et } \phi_{1,1} = \phi_{1,2}$
- $H_1 : \phi_{0,1} \neq \phi_{0,2} \text{ et/ou } \phi_{1,1} \neq \phi_{1,2}$

### Remarque :

Ce type de tests est difficile à implémenter car sous  $H_0$  on est en présence de paramètres de nuisance (non-identifiés),  $\gamma$  et  $c$ .

the STAR model contains parameters which are not restricted by the null hypothesis, but about which nothing can be learned from the data when the null hypothesis holds true.

For example, the null hypothesis  $\phi_1 = \phi_2$  does not restrict the parameters in the transition function,  $\gamma$  and  $c$ , but when the null hypothesis is valid, the likelihood is unaffected by the values of  $\gamma$  and  $c$ .

# Test de linéarité versus STAR

## STAR

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - G(z_t; \gamma, c)) \\ + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})G(z_t; \gamma, c) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2) \quad (11)$$

## Reformulation de l'hypothèse nulle

■  $H_0 : \gamma = 0$

### Remarque :

Dans ce cas, le paramètre de seuil  $c$  et les paramètres autoregrésifs  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ne sont pas identifiables

L'hypothèse de linéarité peut être réécrite de cette façon.

if  $\gamma = 0$  the (logistic) function  $G$  for example is equal to 0.5 for all values of  $z_t$ , and the STAR model reduces to an AR model with parameters  $(\phi_1 + \phi_2)/2$ .

Under  $H_0$ ,  $\phi_1$  and  $\phi_2$  can take any value as long as their average remains the same.



# Test de linéarité versus STAR

## STAR

### Conséquence :

Les statistiques de test ont des distributions non-standards et les p-values sont calculables uniquement par simulation.

### Solution (Luukkonen, Saikkonen, Teräsvirta, 1988) :

Remplacer la fonction de transition par un développement de Taylor approprié et tester la linéarité par une statistique classique du Multiplicateur de Lagrange (LM) qui suit asymptotiquement une distribution de  $\chi^2$  sous  $H_0$ .

Avantages :

- 1) Estimer uniquement le modèle sous  $H_0$
- 2) Utiliser la théorie asymptotique standard pour calculer les valeurs critiques

# Test de linéarité versus LSTAR

## LSTAR se réécrit

$$y_t = \phi_1' x_t + (\phi_2 - \phi_1)' x_t G(z_t, \gamma, c) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2)$$

avec  $x_t = (1, y_{t-1})'$  et  $\phi_j = (\phi_{0,j}, \phi_{1,j})'$

Approximation de la fonction logistique  $G(z_t, \gamma, c) = \frac{1}{(1 + \exp[-\gamma(z_t - c)])}$  par le développement de Taylor d'ordre un autour de  $\gamma = 0$  conduit à la régression auxiliaire :

$$y_t = \beta_0' x_t + \beta_1' x_t z_t + e_t,$$

où  $\beta_i = (\beta_{i,0}, \beta_{i,p})$ ,  $i = 0, 1$  et  $e_t = \varepsilon_t + (\phi_2 - \phi_1)' x_t R_1(z_t, \gamma, c)$  et  $R_1(z_t, \gamma, c)$  représente le résidu du développement de Taylor.

- Sous  $H_0$ ,  $R_1(z_t, \gamma, c) = 0$  et  $e_t = \varepsilon_t$ . Ce terme n'affecte pas les innovations et de ce fait la théorie asymptotique du test.

# Test de linéarité versus LSTAR

Les paramètres  $\beta_i$  de la régression auxiliaire sont des fonctions des paramètres  $\phi$  du modèle LSTAR

$\Rightarrow H_0 : \gamma = 0$  ( $\phi_1 = \phi_2$ ) est équivalente à  $H_0'' : \beta_1 = 0$ .

$$\text{LM} - \text{type test} - \text{statistic} \xrightarrow{d} \chi^2(2)$$

## Remarque 1. :

Si le modèle est autorégressif d'ordre  $p$ , alors  $H_0 : \phi_0 = \dots = \phi_p$  est équivalente à  $H_0'' : \beta_1 = 0$ , avec  $\beta_1 = (\beta_{1,0}, \dots, \beta_{1,p})$  et

$$\text{LM} - \text{type test} - \text{statistic} \xrightarrow{d} \chi^2(p+1)$$

## Remarque 2. :

Si  $z_t = y_{t-1}$ , le terme  $\beta_{1,0}z_t$  doit être éliminé de la régression auxiliaire pour éviter la multi-colinéarité parfaite

# Test de linéarité versus LSTAR - détails

Réécriture

$$y_t = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)'y_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1)'y_{t-1}G^*(z_t, \gamma, c),$$

avec  $G^*(z_t, \gamma, c) = G(z_t, \gamma, c) - \frac{1}{2}$ .

Sous  $H_0$ ,  $G^*(z_t, \gamma, c) = 0$

Développement de Taylor d'ordre 1 de  $G^*(z_t, \gamma, c)$  au voisinage de  $\gamma = 0$

$$T(z_t, \gamma, c) \simeq G^*(z_t, 0, c) + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} G^*(z_t, \gamma, c) \Big|_{\gamma=0}$$

# Test de linéarité versus LSTAR - détails

$$T(z_t, \gamma, c) \simeq \frac{1}{4}\gamma(z_t - c),$$

$$\text{car } G^*(z_t, 0, c) = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial}{\partial \gamma} G^*(z_t, \gamma, c) \right|_{\gamma=0} = \frac{1}{4}(z_t - c)$$

Le modèle devient :

$$y_t = \left[ \frac{1}{2}(\phi_{0,1} + \phi_{0,2}) - \frac{\gamma c}{4}(\phi_{0,2} - \phi_{0,1}) \right] \quad (12)$$

$$+ \left[ \frac{1}{2}(\phi_{1,1} + \phi_{1,2}) - \frac{\gamma c}{4}(\phi_{1,2} - \phi_{1,1}) \right] y_{t-1} \quad (13)$$

$$+ \frac{\gamma}{4}(\phi_{0,2} - \phi_{0,1})z_t + \frac{\gamma}{4}(\phi_{1,2} - \phi_{1,1})y_{t-1}z_t + \varepsilon_t \quad (14)$$

dérivation de cette écriture :

$$Y_t = \frac{1}{2} (\phi_1 + \phi_2)' X_t + (\phi_2 - \phi_1)' X_t G^* (Y_{t-1}, \gamma, c) + u_t$$

$$Y_t = \frac{1}{2} (\phi_1 + \phi_2)' X_t + (\phi_2 - \phi_1)' X_t \left[ \frac{1}{4} \gamma (Y_{t-1} - c) \right] + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{2} (\phi_{0,1} + \phi_{0,2}) + \frac{1}{2} (\phi_{1,1} + \phi_{1,2}) Y_{t-1} + \\ &\quad + \frac{1}{4} [\gamma (Y_{t-1} - c)] [(\phi_{0,2} - \phi_{0,1}) + (\phi_{1,2} - \phi_{1,1}) Y_{t-1}] + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_t &= \left[ \frac{1}{2} (\phi_{0,1} + \phi_{0,2}) - \frac{\gamma c}{4} (\phi_{0,2} - \phi_{0,1}) \right] + \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} (\phi_{1,1} + \phi_{1,2}) + \frac{\gamma}{4} (\phi_{0,2} - \phi_{0,1}) - \frac{\gamma c}{4} (\phi_{1,2} - \phi_{1,1}) \right] Y_{t-1} + \\ &\quad + \frac{\gamma}{4} (\phi_{1,2} - \phi_{1,1}) Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

# Test de linéarité versus STAR - détails

Régression auxiliaire :

$$y_t = \beta_{0,0} + \beta_{0,1}y_{t-1} + \beta_{1,1}y_{t-1}z_t + \varepsilon_t$$

avec

$$\beta_{0,0} = \frac{1}{2}(\phi_{0,1} + \phi_{0,2}) - \frac{\gamma c}{4}(\phi_{0,2} - \phi_{0,1}) \quad (15)$$

$$\beta_{0,1} = \frac{1}{2}(\phi_{1,1} + \phi_{1,2}) - \frac{\gamma c}{4}(\phi_{1,2} - \phi_{1,1}) \quad (16)$$

$$\beta_{1,1} = \frac{\gamma}{4}(\phi_{1,2} - \phi_{1,1}). \quad (17)$$

$$H_0 : \beta_{1,1} = 0$$

Construisons le test

Reg complète

$$y_t = \beta_{0,0} + \beta_{0,1}y_{t-1} + \beta_{1,1}y_{t-1}z_t + \beta_{1,0}z_t + \varepsilon_t$$

mais le terme d'interaction nous intéresse uniquement et pas le rôle de  $z_t$  dans la modélisation du  $y_t$



# Test de linéarité versus STAR - procédure

## 1 Estimer le modèle sous $H_0$

$$y_t = \beta_{0,0} + \beta_{1,0}y_{t-1} + \tilde{\epsilon}_t$$

et notez  $SCR_0$  la somme des carrés de résidus associée

$$SCR_0 = \sum_{t=1}^n \hat{\tilde{\epsilon}}_t^2$$

## 2 Estimer le modèle auxiliaire

$$y_t = \beta_{0,0} + \beta_{1,0}y_{t-1} + \beta_{1,1}y_{t-1}z_t + \epsilon_t$$

et notez  $SCR_1$  la somme des carrés de résidus associée

$$SCR_1 = \sum_{t=1}^n \hat{\epsilon}_t^2$$

## 3 Statistique du test

$$LM = \frac{n(SCR_0 - SCR_1)}{SCR_0} \sim \chi^2(2)$$

et la version F-test

$$F = (n-3) \frac{SCR_0 - SCR_1}{SCR_1} \sim Fisher(1, n-3).$$

# Test de linéarité versus ESTAR

Régression auxiliaire :

$$y_t = \beta'_0 x_t + \beta'_1 x_t z_t + \beta'_2 x_t z_t^2 + e_t,$$

où  $\beta_i = (\beta_{i,1}), \beta_{i,1}), i = 0, 1, 2$  et  $e_t = \varepsilon_t + (\phi_2 - \phi_1)' x_t R_2(z_t, \gamma, c)$  et  $R_2(z_t, \gamma, c)$  représente le résidu du développement de Taylor de premier ordre.

$H_0 : \gamma = 0$  est équivalente à  $H_0'' \beta_1 = \beta_2 = 0$

$$\text{LM} - \text{type test} - \text{statistic} \xrightarrow{d} \chi^2(2(p+1))$$

Taylor expansion of the exponential transition function :

$$(c^2 - 2cz_t + z_t^2)\gamma + O(\gamma)^2$$

# Tests d'hypothèses

Remarque :

- Sur des échantillons de taille finie il est conseillé d'utiliser les F-tests à la place des tests LM car ils ont de meilleures propriétés en termes de taille. Ces derniers ont souvent une taille largement au dessus de la taille nominale.

# Tests de spécification des STAR

- Non-autocorrélation des résidus
- Non-linéarité restante
- Paramètres constants dans le temps

Eitrheim et Teräsvirta (1996) proposent des tests LM pour ces hypothèses

test 2 peut être interprété comme un test de STAR vs. STAR avec des régimes multiples

test 3 STAR vs time-varying STAR

# Tests de spécification des STAR

## Non-autocorrélation des résidus

Squelette du modèle STAR :

$$F(x_t, \hat{\theta}) = \phi_1' x_t + (\phi_2 - \phi_1)' x_t G(z_t, \gamma, c),$$

où  $\theta = (\phi_0, \phi_1, \gamma, c)'$

$H_0 : \text{corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \dots = \text{corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-q}) = 0$

$H_1 : \text{corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \neq 0 \text{ et/ou } \dots \text{corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-q}) \neq 0$

$$\blacksquare LM(q) = nR^2 \xrightarrow{d} \chi^2(q),$$

avec  $R^2$  le coefficient de détermination de la régression de  $\hat{\varepsilon}_t$  sur  $\nabla F(x_t, \hat{\theta}) = \partial F(x_t, \hat{\theta}) / \partial \theta$  et les  $q$  résidus retardés  $\hat{\varepsilon}_{t-1}, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-q}$  issues de l'estimation du modèle sous  $H_0$  d'indépendance.

# Tests de spécification des STAR

## Non-linéarité restante

Comparaison du STAR avec 2 et 3 régimes respectivement

$H_0' : \gamma_2 = 0$  ou  $H_0 : \phi_3 = \phi_2$

- Problème d'identification  $\Rightarrow$  Développement de Taylor d'ordre trois autour de  $\gamma_2 = 0$

$$y_t = \beta'_0 x_t + (\phi_2 - \phi_1)' x_t G_1(z_t, \gamma_1, c) + \beta'_1 x_t z_t + \beta'_2 x_t z_t^2 + \beta'_3 x_t z_t^3 + e_t,$$

avec  $\beta_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  des fonctions des paramètres  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \gamma_2, c_2$ .

$H_0''$  équivalente :  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

### Remarque :

Si  $z_t$  est un élément de  $x_t$ , alors les termes  $\beta_{i,0} z_t^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  doivent être omis dans la régression auxiliaire



Rappel : modèle à 3 régimes

$$y_t = \phi_1' x_t + (\phi_2 - \phi_1)' x_t G_1(z_t) + (\phi_3 - \phi_2)' x_t G_2(z_t) + \varepsilon_t$$

# Tests de spécification des STAR

## Non-linéarité restante

$$\blacksquare LM_{MR} = nR^2 \xrightarrow{d} \chi^2(3(p+1)),$$

avec  $R^2$  le coefficient de détermination de la régression de  $\hat{\varepsilon}_t$  sur  $\nabla F(x_t, \hat{\theta}) = \partial F(x_t, \hat{\theta}) / \partial \theta$ , issues de l'estimation du modèle sous  $H_0$  (STAR à deux régimes) et les régresseurs auxiliaires  $x_t z_t^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , avec  $\theta = (\phi_1, \phi_2, \gamma_1, c_1)$ .

# Tests de spécification des STAR

## Paramètres constants dans le temps

- Ce n'est pas une question spécifique aux modèles non-linéaires
- Le modèle sous l'hypothèse alternative

$$y_t = \phi_1(t)'x_t + (\phi_2(t) - \phi_1(t))'x_t G(z_t, \gamma, c) + \varepsilon_t,$$

avec  $x_t = (1, y_{t-1})'$  et  $\phi_j = (\phi_{0,j}, \phi_{1,j})'$   
 $\phi_1(t) = \phi_1[1 - G_2(t, \gamma_2, c_2)] + \phi_3 G_2(t, \gamma_2, c_2)$   
 $\phi_2(t) = \phi_2[1 - G_2(t, \gamma_2, c_2)] + \phi_4 G_2(t, \gamma_2, c_2)$

- $H_0 : \gamma_2 = 0$
- Le test LM est basé sur un développement de Taylor d'ordre trois de  $G_2(t, \gamma_2, c_2)$  et la régression auxiliaire

$$y_t = \beta_0'x_t + \beta_1'x_t t + e_t$$

- $LM : nR^2 \sim \chi^2(p+1)$

# Tests de spécification

## LSTAR vs ESTAR

- Rejeter la linéarité en faveur d'une spécification STAR, mais laquelle ?
- Procédure basé sur les F-tests emboîtés
- Régression auxiliaire

$$y_t = \beta'_0 x_t + \beta'_1 x_t z_t + \beta'_2 x_t z_t^2 + \beta'_3 x_t z_t^3 + \beta'_4 x_t z_t^4 + e_t,$$

avec  $\beta_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  des fonctions des paramètres initiaux

- LSTAR - 1 point d'inflexion ; ESTAR en a 2
- les puissances paires du dvpt de Taylor de la fct logistique autour de  $\gamma = 0$  sont nulles
- les puissances impaires du dvpt de Taylor de la fct exp autour de  $\gamma = 0$  sont nulles
- La puissance des tests de non-linéarité dépend de la qualité de l'approximation par dvpt de Taylor de la fct de transition. Les différences dans la forme des deux fonctions de transition indique qu'il faut au moins un dvpt d'ordre 2 pour identifier les points d'inflexion ; des termes d'ordre 4 seront ainsi inclus dans la régression auxiliaire

# Tests de spécification

## LSTAR vs ESTAR

Escribano et Jorda (2001) proposent une procédure de test fiable simple et opérationnelle

Conditionnellement au rejet de la linéarité,

- Tester  $H_{0E} : \beta'_2 = \beta'_4 = 0$  avec un F-test ( $F_E$ )
- Tester  $H_{0L} : \beta'_1 = \beta'_3 = 0$  avec un F-test ( $F_L$ )
- Si la p-value minimale correspond au test  $F_L$ , on sélectionne le LSTAR, sinon le ESTAR
- Cette procédure est convergente quand  $c = 0$  et elle reste opérationnelle quand  $c \neq 0$  car on compare la significativité jointe des termes d'ordre 1 et 3 à celle des termes d'ordre 2 et 4 *sans faire d'hypothèse sur la nullité des autres paramètres.*

# Plan

- |   |                           |   |             |
|---|---------------------------|---|-------------|
| 1 | Quelques faits stylisés   | 4 | Estimation  |
| 2 | Les modèles non-linéaires | 5 | Tests       |
| 3 | Stationnarité du SETAR    | 6 | Application |

## Application : l'énigme du forward premium

- Baillie et Kiliç (2006) s'intéressent à **l'énigme de la prime à terme**
- On pose  $s_t$  et  $f_t$  les log des taux spot et forward respectivement
- Dans un univers risque-neutre et en présence d'anticipations rationnelles (RE)

$$f_t = \mathbb{E}_t(s_{t+1})$$

- Les RE impliquent qu'en moyenne les agents anticipent bien : avec  $\varepsilon$  les erreurs d'anticipation on a  $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$
- En supposant que les erreurs d'anticipation suivent un bruit blanc on devrait observer

$$s_{t+1} = f_t + \varepsilon_{t+1}$$

- Cette équation décrit la **forward rate unbiasedness hypothesis (FRUH)**



Rappel pour étudiants : un **forward** est un produit de **gré à gré** permettant l'achat ou la vente d'une devise à une date future

## Application : l'énigme du forward premium

- En retirant  $s_t$  de chaque côté de l'équation on obtient

$$\Delta s_{t+1} = f_t - s_t + \varepsilon_{t+1}$$

où  $f_t - s_t$  caractérise ce que l'on nomme la **prime à terme (forward premium)**

- On voit alors qu'une **condition nécessaire** pour la FRUH est

$$\Delta s_{t+1} = \alpha + \beta(f_t - s_t) + \varepsilon_{t+1}$$

avec  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon_{t+1} \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma^2)$

- En d'autres termes, si  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ , le **forward premium est un bon prédicteur** de la variation anticipée du taux de change
- **Enigme** : cette théorie ne trouve pas de validation empirique et plus surprenant,  $\beta$  est souvent négatif

## Application : l'énigme du forward premium

- Baillie et Kiliç (2006) suggèrent que le modèle linéaire est inapproprié car dans la pratique
  - présence d'agents hétérogènes
  - présence de coûts de transaction
  - présence d'opportunité d'arbitrage
- ⇒ déviations possibles et ajustements asymétriques progressifs
- Ces phénomènes justifient l'utilisation d'un LSTAR
  - l'ajustement d'un TAR serait trop abrupt

## Application : l'énigme du forward premium

- Baillie et Kiliç (2006) formulent donc une version nonlinéaire de la FRUH

$$\Delta s_{t+1} = (\alpha_1 + \beta_1(f_t - s_t)) + (\alpha_2 + \beta_2(f_t - s_t))F(z_t, \gamma, c) + \varepsilon_{t+1} \quad (18)$$

avec

$$F(z_t, \gamma, c) = \frac{1}{1 + \exp(-\gamma(z_t - c)/\sigma_z)}$$

- Si  $\gamma = 0$ , (18) revient au modèle linéaire car

- $F(z_t, \gamma, c) = 0.5$

- $\alpha = \alpha_1 + 0.5\alpha_2$

- $\beta = \beta_1 + 0.5\beta_2$

- Baillie et Kiliç (2006) considèrent différents  $z_t$

- ici on se focalisera sur  $z_t = (f_{t-1} - s_{t-1})/\sigma_z$

La normalisation de  $z_t$  par  $\sigma_z$  présente des avantages car le paramètre  $\gamma$  n'est pas affecté par l'échelle de  $z_t$  :

- 1) cela peut faciliter la convergence (numérique) des estimateurs
- 2) cela peut permettre de comparer différents modèles malgré différents  $z_t$  car  $\gamma$  est comparable

## Application : l'énigme du forward premium

- Baillie et Kiliç (2006) étudient les pays suivant

- BF = Franc Belge
- CD = Dollar Canadien
- DG = Dutch Guilder
- FF = Franc Français
- GM = German Mark
- IL = Italian Lira
- JY = Japanese Yen
- SF = Swiss Franc
- UKP = UK Pound

- La période de l'étude :

- données mensuelles entre 12/1978 et 01/2002

# Application : l'énigme du forward premium

## ■ Résultats de l'estimation du modèle linéaire

	BF	CD	DG	FF	GM	IL	JY	SF	UKP
Panel A									
$\alpha$	0.001 (0.002)	0.002 (0.001)	-0.002 (0.002)	0.001 (0.002)	-0.002 (0.002)	0.001 (0.003)	-0.010 (0.003)	-0.004 (0.003)	0.006 (0.002)
$\beta$	-0.824 (0.703)	-1.132 (0.378)	-1.598 (0.730)	0.032 (0.650)	-0.894 (0.669)	0.448 (0.751)	-2.728 (0.684)	-1.395 (0.605)	-2.526 (0.819)
$t_{\beta=1}$	-2.719	-5.640	-3.559	-1.578	-2.831	-1.928	-5.450	-4.305	-4.305

■  $\alpha$  est proche de 0 et en général non-significatif

■  $\beta$  est presque toujours négatif

■ l'hypothèse  $\beta = 1$  est toujours rejetée sauf pour la France et l'Italie au seuil de 5%

⇒ le modèle linéaire conduit au **rejet de la FRUH** pour ces pays

$t_{\beta=1}$  est une t-stat robust avec sous  $H_0 : \beta = 1$



# Application : l'énigme du forward premium

## ■ Résultats de l'estimation du modèle non-linéaire (18)

	BF	CD	DG	FF	GM	IL	JY	SF	UKP
$\alpha_1$	-0.004 (0.008)	0.004 (0.006)	-0.016 (0.004)	0.002 (0.007)	-0.012 (0.005)	0.006 (0.005)	-0.008 (0.019)	-0.012 (0.004)	0.006 (0.002)
$\beta_1$	-6.355 (2.742)	0.258 (2.793)	-6.498 (1.412)	-3.328 (2.430)	-4.137 (1.448)	-2.965 (1.699)	-2.951 (2.403)	-2.923 (0.857)	-4.373 (0.978)
$\alpha_2$	-0.003 (0.010)	-0.002 (0.012)	0.011 (0.010)	-0.009 (0.010)	0.009 (0.014)	0.034 (0.029)	-0.007 (0.038)	0.064 (0.045)	0.080 (0.090)
$\beta_2$	8.010 (2.689)	-1.369 (1.641)	8.221 (2.613)	4.987 (2.371)	5.322 (2.660)	1.448 (3.252)	10.481 (5.278)	13.158 (11.203)	9.386 (13.836)
$\gamma$	4.753 (2.709)	2.418 (3.697)	19.356 (3.045)	6.779 (2.061)	8.931 (3.605)	1.872 (0.632)	1.790 (0.871)	8.017 (0.835)	8.766 (1.70)
c	0.000	0.002	0.000	0.001	0.000	0.007	0.000	0.000	0.005
T	241	278	241	241	241	241	278	278	278
W	2.196	6.686	0.693	3.721	0.334	3.883	0.581	5.780	1.513
BS <sub>stat</sub>	5.376	4.480	5.804	5.612	5.622	5.667	5.745	5.381	5.705

## Application : l'énigme du forward premium

- les coefficients  $\beta_2$  sont positifs et généralement significatifs
  - les coefficients  $\beta_1$  sont négatifs et généralement significatifs
  - Statistique de Wald : sous  $H_0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 0$  et  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ 
    - la statistique  $W$  suit une  $\chi^2_{(2)}$  sous  $H_0$  ce qui donne une valeur critique de 5.99 à 5%
      - on ne peut pas rejeter  $H_0$  pour l'ensemble des pays excepté CD
    - $BS_{stat}$  est une valeur critique obtenue par simulation
      - on ne peut pas rejeter  $H_0$  pour l'ensemble des pays excepté CD et SF
- ⇒ dans les deux cas, les résultats convergent en faveur de la FRUH

- $BS_{stat}$  est en faite le 95ième percentile d'une distribution bootstrappée pour le test de Wald
- Les résultats vont dans le même sens que si on considère une distribution de  $\chi^2_2$  puisque la seule différence vient de SF
- Les résultats sur l'autocorrélation des résidus ne sont pas reportés mais les auteurs ont bien contrôlé pour cela
- Les résultats sur concernant les tests de non-linéarité résiduelle dans les erreurs ne sont pas non-plus reportés mais les auteurs ont également contrôlé pour cela

# Application : l'énigme du forward premium

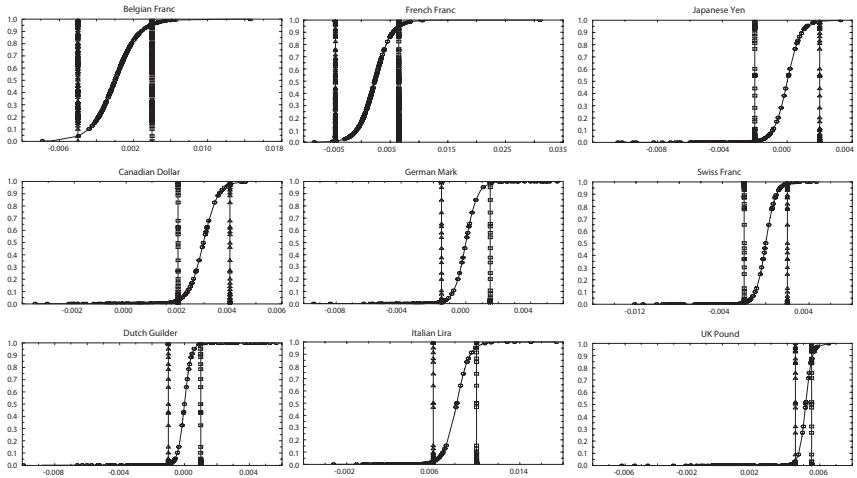
## ■ Résultats de l'estimation du modèle non-linéaire (18)

	BF	CD	DG	FF	GM	IL	JY	SF	UKP
$\alpha_1$	-0.004 (0.008)	0.004 (0.006)	-0.016 (0.004)	0.002 (0.007)	-0.012 (0.005)	0.006 (0.005)	-0.008 (0.019)	-0.012 (0.004)	0.006 (0.002)
$\beta_1$	-6.355 (2.742)	0.258 (2.793)	-6.498 (1.412)	-3.328 (2.430)	-4.137 (1.448)	-2.965 (1.699)	-2.951 (2.403)	-2.923 (0.857)	-4.373 (0.978)
$\alpha_2$	-0.003 (0.010)	-0.002 (0.012)	0.011 (0.010)	-0.009 (0.010)	0.009 (0.014)	0.034 (0.029)	-0.007 (0.038)	0.064 (0.045)	0.080 (0.090)
$\beta_2$	8.010 (2.689)	-1.369 (1.641)	8.221 (2.613)	4.987 (2.371)	5.322 (2.660)	1.448 (3.252)	10.481 (5.278)	13.158 (11.203)	9.386 (13.836)
$\gamma$	4.753 (2.709)	2.418 (3.697)	19.356 (3.045)	6.779 (2.061)	8.931 (3.605)	1.872 (0.632)	1.790 (0.871)	8.017 (0.835)	8.766 (1.70)
c	0.000	0.002	0.000	0.001	0.000	0.007	0.000	0.000	0.005
T	241	278	241	241	241	241	278	278	278
W	2.196	6.686	0.693	3.721	0.334	3.883	0.581	5.780	1.513
BS <sub>stat</sub>	5.376	4.480	5.804	5.612	5.622	5.667	5.745	5.381	5.705

## Application : l'énigme du forward premium

- Concernant le paramètre de pente de  $F(\cdot)$ 
  - le coefficient  $\gamma$  est toujours significativement différent de 0
  - ⇒ cela confirme la présence de deux régimes et donc de nonlinéarité
- Concernant le paramètre de seuil de  $F(\cdot)$ 
  - le paramètre  $c$  est toujours proche de 0
  - ⇒ le régime 1 intervient lorsque  $z_t = f_{t-1} - s_{t-1} < 0$  est négatif
  - ⇒ le régime 2 intervient lorsque  $z_t = f_{t-1} - s_{t-1} > 0$  est positif

# Application : l'énigme du forward premium



Les lignes verticales correspondent respectivement aux cas  $F(.) = 0$  et  $F(.) = 1$

# Application : l'énigme du forward premium

## ■ Conclusion de l'application

- Dans le régime 1, en général,  $\beta_1 < 0$

⇒ la FRUH ne tient pas quand le forward premium est négatif

- Dans le régime 2, en général,  $\beta_2 > 0$

⇒ la FRUH semble tenir quand le forward premium est positif

⇒ Considérer la présence de non-linéarité permet de résoudre partiellement l'énigme



- Baillie, R.T., Kiliç, R., 2006. Do asymmetric and nonlinear adjustments explain the forward premium anomaly ? *Journal of International Money and Finance* 25, 22-47.
- Chan, K.S., 1993. Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model, *Annals of Statistics* 21, 520-33
- Chan, K.S. et H. Tong, 1985. On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations, *Advances in Applied Probability* 17, 666-78.
- Chan, K. S., Petrucci, J. D., Tong, H., Woolford, S. W., 1985. A multiple-threshold AR (1) model. *Journal of Applied Probability*, 267-279.
- Dijk, D. V., Teräsvirta, T., Franses, P. H., 2002. Smooth transition autoregressive models-a survey of recent developments. *Econometric reviews*, 21(1), 1-47.
- Eitrheim, O. and T. Teräsvirta, 1996, Testing the adequacy of smooth transition autoregressive models, *Journal of Econometrics* 74, 59-76
- Escribano, A. and Jorda, O., 2001. Testing nonlinearity : Decision rules for selecting between logistic and exponential STAR models, *Spanish Economic Review*, 3(3), pp.193-209.
- Hansen, B.E., 1997. Inference in TAR models, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* 2, 1-14.
- Potscher, B.M. and I.V. Prucha, 1997. *Dynamic Nonlinear Econometric Models - Asymptotic Theory*, Berlin : Springer-Verlag
- Teräsvirta, T. et Anderson, H. M. (1992). Characterizing nonlinearities in business cycles using smooth transition autoregressive models. *Journal of Applied Econometrics*, 7, 119-136.
- Tong, H., 1990. *Non-Linear Time Series : A Dynamical Systems Approach*, Oxford : Oxford University Press