



# MÉTHODES ET INSTRUMENTS DE LA FINANCE

Master 1 MBFA

Partie 1

Gilles de Truchis  
&  
Elena Dumitrescu

Site : [www.varennnes-ecofin.com/](http://www.varennnes-ecofin.com/)



# PLAN DU CHAPITRE

## 1. Généralités

## 2. Introduction

### 2.1 Quelques définitions

### 2.2 L'intermédiation financière

### 2.3 Le système financier

### 2.4 Un peu de théorie financière

### 2.5 Agents et comportements

## 3. La finance en avenir certain

### 3.1 Rappels sur les taux

### 3.2 Un peu de mathématiques financières

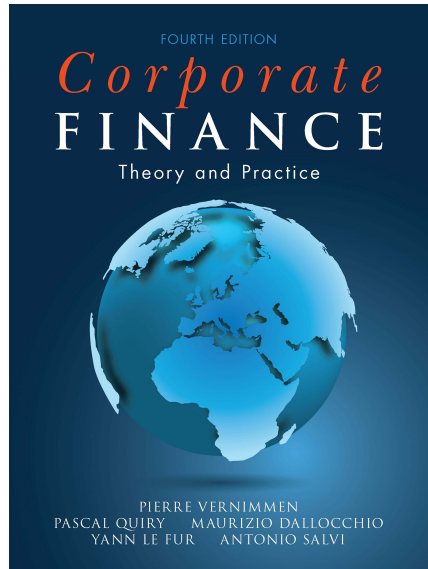
## 4. Conclusion

# GÉNÉRALITÉS

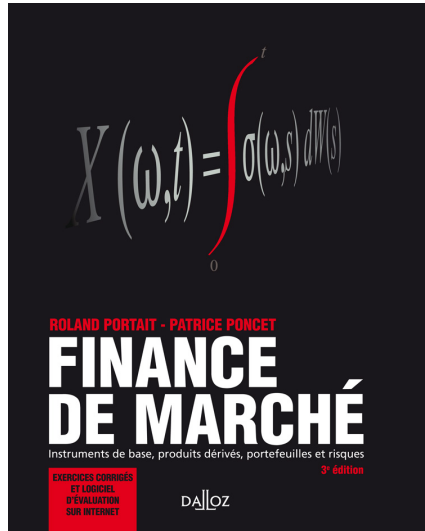
# ORGANISATION DU COURS

- ▶ Le cours est organisé en 8 séances de 3h (3h30 pour la FA)
- ▶ Le cours s'articule autour de cinq chapitres
  - ▶ Introduction
  - ▶ La finance en avenir certain
  - ▶ Rappels statistiques
  - ▶ La finance en avenir incertain
  - ▶ Introduction à la théorie des options (à la théorie du portefeuille pour la FA)
- ▶ Objectif
  - ▶ Poser (ou rappeler) un savoir de base pour les enseignements plus spécialisés du Master
    - ▶ Économie des intermédiaires financiers
    - ▶ Gestion de portefeuilles
    - ▶ Mathématiques financières
    - ▶ Théorie des options
- ▶ Les séances seront ponctuées de quelques applications pratiques
  - ▶ Exercices

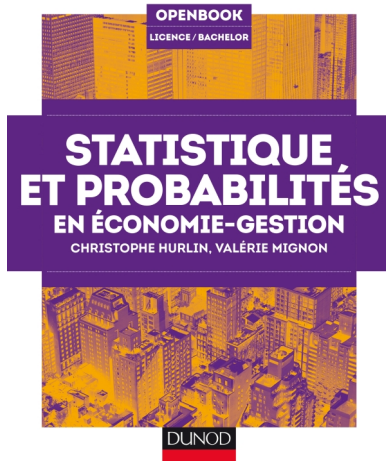
## OUVRAGES DE RÉFÉRENCES



## OUVRAGES DE RÉFÉRENCES



## OUVRAGES DE RÉFÉRENCES



# ÉVALUATION

- ▶ Partiel de 2h
- ▶ Questions de cours
  - ▶ Concepts généraux
  - ▶ Définitions de bases
  - ▶ Réflexion sur l'actualité économique et financière
  - ⇒ Comprendre et proposer une analyse critique de l'environnement économique est crucial dans le monde de l'entreprise
- ▶ Exercices techniques
  - ▶ Apprendre par cœur n'est pas recommandé
  - ⇒ Comprendre la logique des exercices faits en cours
  - ⇒ Mobiliser son savoir pour résoudre des problèmes inédits



# INTRODUCTION

# PLAN

## 1. Généralités

## 2. Introduction

### 2.1 Quelques définitions

### 2.2 L'intermédiation financière

### 2.3 Le système financier

### 2.4 Un peu de théorie financière

### 2.5 Agents et comportements

## 3. La finance en avenir certain

### 3.1 Rappels sur les taux

### 3.2 Un peu de mathématiques financières

## 4. Conclusion

## UN PEU DE FINANCE D'ENTREPRISE...

- ▶ Pour vivre une entreprise a besoin de capitaux
  - ▶ Financement du besoin en fonds de roulement (BFR)
  - ▶ Investissement productif
  - ▶ Investissement en R&D
  - ▶ ...
  
- ▶ L'entreprise va donc intervenir sur le **marché des capitaux**
  - ⇒ Comme vendeuse ou acheteuse ?
  
- ▶ Deux visions possibles :
  - ▶ L'entreprise peut acheter des capitaux
  - ▶ L'entreprise peut vendre des titres financiers

# L'ENTREPRISE COMME ACHETEUSE DE CAPITAUX

L'entreprise va opérer sur le marché des capitaux comme **acheteuse**

- ▶ La matière première est l'argent
- ▶ Le prix de cette matière première est le taux d'intérêt
- ▶ Les acteurs du marché sont
  - ▶ les entreprises
  - ▶ les banques
  - ▶ les intermédiaires financiers (si montage d'opérations financières complexes)
  
- ▶ **L'objectif de l'entreprise est alors de minimiser le coût des capitaux collectés**

# L'ENTREPRISE COMME VENDEUSE DE TITRES

L'entreprise va opérer sur le marché des **titres financiers**

- ▶ Sur ce marché l'entreprise n'est plus acheteuse mais vendeuse
  - ⇒ offre de titres = demande de capitaux
  - ⇒ demande de titres = offre de capitaux
- ▶ Sur ce marché, le prix est la valeur du titre financier échangé
- ▶ **L'entreprise cherche donc à maximiser un prix de vente**

# UN MÊME MARCHÉ POUR DEUX VISIONS

## Lien entre les deux visions

Minimiser un coût de financement revient à maximiser la valeur du titre correspondant à ce financement

Quelle vision adopter ?

- ▶ Le choix de l'ouvrage de référence est celui des titres financiers
- ▶ Minimisation des coûts = risque de comportements déviants
  - ⇒ dettes versus capitaux propres
  - ⇒ négligence du facteur risque
  - ⇒ court terme versus long terme : **myopie**

# L'ÉMISSION DE TITRES FINANCIERS

## ► Qu'est-ce qu'un titre financier ?

⇒ C'est un **contrat** : le titre confère à son détenteur un droit sur une **chronique de flux financiers futurs**

## ► En vendant un tel contrat à un prix $x$ , l'entreprise va collecter une ressources financière d'un montant $x$

⇒ **L'entreprise émet des titres**

## ► En achetant un tel contrat, un investisseur va récupérer des flux financiers dans le futurs

⇒ **L'investisseur souscrit les titres**

# LE RISQUE ET LES TITRES FINANCIERS

- ▶ La dimension temporelle d'un titre est très importante
  - ▶ Flux financiers **futurs** ⇒ engendre un **risque**
    - ⇒ risque de marché
    - ⇒ risque de crédit
    - ⇒ risque de liquidité
    - ⇒ risque opérationnel
    - ⇒ risque légal
    - ⇒ ...
- ▶ Le risque est présent même pour les meilleures signatures
  - ⇒ événements imprévisibles : guerres, catastrophes naturelles, ...
- ▶ L'analyse du risque est donc crucial en finance



# APERÇU DES TYPES DE RISQUES

## ► Le risque de marché

⇒ risque que la variation d'un prix (ou autres facteurs de marché) entraîne des pertes pour le souscripteur

## ► Le risque de crédit

⇒ risque que l'entreprise n'honore pas ces obligations

## ► Le risque de liquidité

⇒ risque de ne pas pouvoir se détacher d'un titre financier

## ► Le risque opérationnel

⇒ risque lié à l'erreur humaine (fraude, problème informatique...)

## ► Le risque légal

⇒ risque lié au cadre juridique (contrat mal spécifié, modification réglementaire...)

# LES TITRES FINANCIERS

On distingue diverses catégories de titres financiers

► Les titres de dette

- ⇒ **L'obligation** : il s'agit d'un titre de créance négociable représentant une fraction d'un emprunt émis par une entreprise (ou autres...)
- ⇒ **Le certificat de dépôt** : il s'agit d'un titre de créance négociable représentant une fraction d'un emprunt à court terme (1 jours à 1 an) émis par une entreprise (ou autres...)

## Risque et titres de dette

La rémunération des titres de dette est fixée contractuellement, désindexée des résultats de l'entreprise, généralement fixe et parfois indexée sur un taux (e.g. inflation)

# LES TITRES FINANCIERS

## ► Les titres en actions

- ⇒ La notion de **capitaux propres** : il s'agit des fonds définitivement apportés par les actionnaires au lancement de l'entreprise et ultérieurement lors d'opérations d'augmentation du capital.
- ⇒ L'**action** : une action est un titre qui confère à son détenteur la propriété d'une partie des capitaux propres d'une société ainsi qu'un certain nombre de droits sociaux

## Risque et titres en actions

L'actionnaire n'est pas assuré d'une chronique de flux certaine (dividendes) car il est lié au destin de l'entreprise. En revanche, il bénéficie des droits sociaux attachés à l'action et peut céder le titre pour quitter l'aventure.

# LES TITRES FINANCIERS

## ► Les titres hybrides

⇒ Un titre **hybride** est une classe de titres mélangeant les caractéristiques des deux catégories de titres précédentes

### ► Il existe deux sous-classes de titres hybrides :

- Les titres donnant accès au capital : bons de souscription, obligations convertibles, obligations remboursables en actions...
- Les actions de préférence : certificats d'investissement, actions à dividende prioritaires...

## ► Les options

⇒ Une **option** est un titre conférant le droit et non l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif à un prix convenu et pendant (option américaine) ou à l'échéance (option européenne) d'une période définie au préalable.

# LES MARCHÉS FINANCIERS

## Le marché primaire

- ▶ L'émission de **nouveaux titres** par une entreprise s'effectue sur le marché primaire
- ▶ Une entreprise va intervenir sur ce marché lors
  - ▶ d'augmentation de capital : émission d'actions
  - ▶ de placement d'emprunt obligataire : émission d'obligations
  - ▶ d'émissions de titre plus complexes...
- ▶ Le marché primaire est **le marché du neuf** qui confronte l'entreprise aux investisseurs
- ▶ La revente des titres s'effectue en revanche sur le marché secondaire

# LES MARCHÉS FINANCIERS

## Le marché secondaire

- ▶ Selon son type, un titre va posséder une échéance allant
  - ▶ du court terme pour un certificat de dépôt
  - ▶ à l'éternité pour une action qui ne possède pas d'échéance
- ▶ Or, la capacité d'un investisseur à se séparer d'un titre est liée au risque de liquidité
- ▶ Le marché secondaire permet de répondre à ce besoin de liquidité
  - ▶ Il s'agit d'un marché de l'occasion, indépendant de l'émetteur
  - ▶ Néanmoins, les caractéristiques des titres échangés ne varient pas

# LES MARCHÉS FINANCIERS

## Les marchés dérivés

- ▶ Il s'agit de marchés sur lesquels s'échangent des produits dont la valeur dépend d'un autre produit appelé sous-jacent
- ▶ Illustration :
  - ▶ Soit une entreprise produisant un bien à partir d'une matière première
    - ▶ L'entreprise emprunte pour l'achat de la matière première
    - ▶ La matière première est achetée en \$ sur le marché mondiale
    - ▶ La production est vendue à l'international pour l'essentielle
  - ⇒ Exposition au risque de taux
  - ⇒ Exposition au risque de fluctuation du prix de la matière première
  - ⇒ Exposition au risque de change (transactions internationales)
- ▶ Les marchés dérivés vont permettre de gérer indépendamment ces risques
  - ⇒ e.g. utilisation d'un **Swap de taux** (échange de deux chroniques de flux)
  - ⇒ e.g. utilisation d'un **contrat Futures** (échange à échéance)
  - ⇒ e.g. utilisation d'une **Option sur devise** (droit d'acheter à un prix fixé)

# LA VALORISATION

Une fois émis, que deviennent les titres ?

- ▶ Une fois sur le marché secondaire, un titre financier va être
    - ▶ échangé un très grand nombre de fois
    - ▶ utilisé comme sous-jacent pour des produits dérivés
    - ▶ ...
  - ▶ **Le titre reste lié avec son émetteur**
    - ▶ par les flux de trésorerie qu'il garantit (e.g. obligation)
    - ▶ par les dividendes qu'il génère (e.g. actions)
- ⇒ Si l'entreprise obtient de mauvais résultats, les titres se déprécieront



# LA VALORISATION

- ▶ L'entreprise doit donc transformer au mieux l'activité économique en flux financiers stables
  - ▶ afin d'atteindre les taux de rentabilité espérés des investisseurs
  - ▶ afin de garantir la qualité de la signature de l'entreprise
  - ▶ afin de valoriser au mieux la valeur des titres émis
- ⇒ afin d'assurer la pérennité de l'entreprise tout en gagnant la confiance des investisseurs et du marché
- ⇒ Comprendre le rôle des marchés financiers et le comportement des investisseurs est donc indispensable

# PLAN

## 1. Généralités

## 2. Introduction

### 2.1 Quelques définitions

### 2.2 L'intermédiation financière

### 2.3 Le système financier

### 2.4 Un peu de théorie financière

### 2.5 Agents et comportements

## 3. La finance en avenir certain

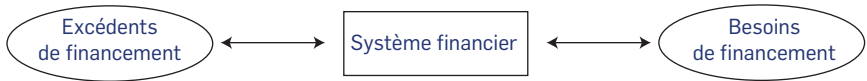
### 3.1 Rappels sur les taux

### 3.2 Un peu de mathématiques financières

## 4. Conclusion

# LE RÔLE DES MARCHÉS FINANCIERS

Le schéma ci-dessous résume sommairement le rôle premier des marchés



On distingue :

► la finance directe

- e.g. souscription d'un actionnaire à une augmentation de capital par l'intermédiaire d'un courtier
- ⇒ Pour ce type d'intermédiaire, seules les commissions apparaissent au compte de résultat

► la finance indirecte

- e.g. un intermédiaire financier souscrit aux titres émis ...
- ... puis émet à son tour des titres à destination des épargnants
- ⇒ on parle d'effet de **transmutation**

# L'INTERMÉDIATION FINANCIÈRE

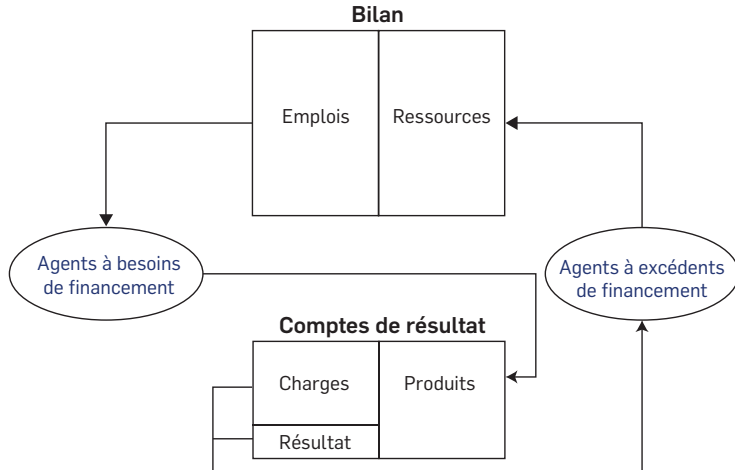
La finance indirecte fait donc intervenir des acteurs financiers tels que

- ▶ des banques
  - ▶ e.g. les dépôts bancaires sur compte courant servent de contre-parties pour des crédits aux entreprises
  
- ▶ des institutions financières (IF)
  - ▶ e.g. suite à une souscription à un contrat d'assurance-vie, les fonds seront généralement placés sur le marché obligataire

⇒ Ces acteurs du marché jouent un rôle **d'intermédiation financière**

# L'INTERMÉDIATION FINANCIÈRE

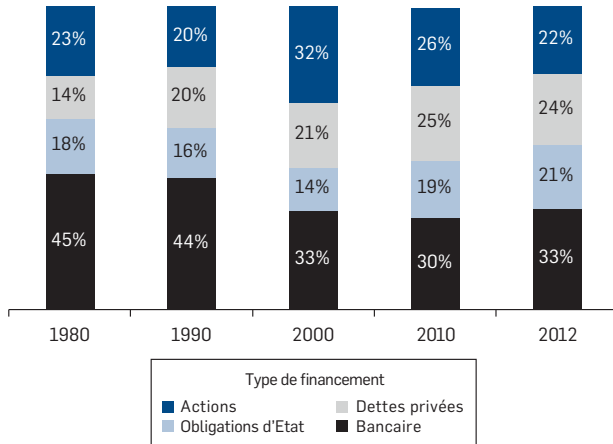
- A l'inverse des courtiers, les opérations d'intermédiation financière apparaissent dans les comptes des banques et des IF



# LA DÉSINTERMÉDIATION FINANCIÈRE

- Depuis les années 2000 une ère de désintermédiation s'est amorcée

Financement par marchés de capitaux et bancaire dans le monde



Source: McKinsey & Company 2013

# LA DÉSINTERMÉDIATION FINANCIÈRE

## ► L'économie de l'endettement

- Avant la fin des années 70, le système financier était peu "développé"
- Le financement des entreprises par émission de titres faible
- Les sources de financement étaient essentiellement les banques
- Système avantageux si l'inflation est élevée car taux réels  $\leq 0$

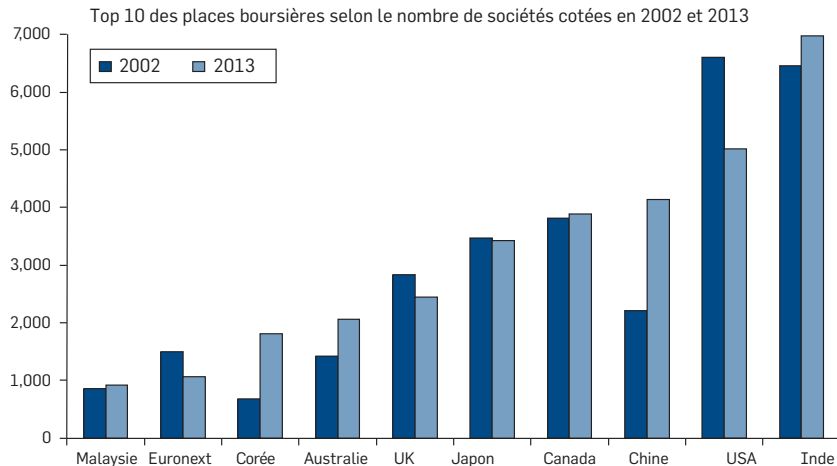
## ► L'effet pervers de l'inflation

- Durant les années 70 l'inflation fut élevée...
- ... et cela a révélé les effets pervers de l'inflation
- ⇒ spoliation de l'épargne
- L'épargnant se détourne alors des banques
- Les banques ont recourt à la banque centrale pour compenser le faible niveau d'épargne
- ⇒ création monétaire qui entretient l'inflation

## ► Vers une économie de marchés financiers

- L'entreprise de grande taille va alors chercher à capter directement l'épargne
- L'économie bancaire répond essentiellement aux PME et aux particuliers

# LE DÉVELOPPEMENT DES MARCHÉS FINANCIERS



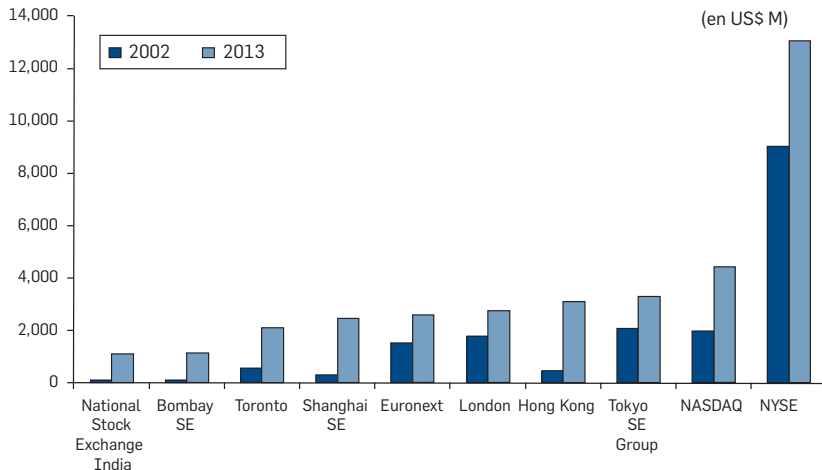
Source : World Federation of Exchanges members



# LE DÉVELOPPEMENT DES MARCHÉS FINANCIERS

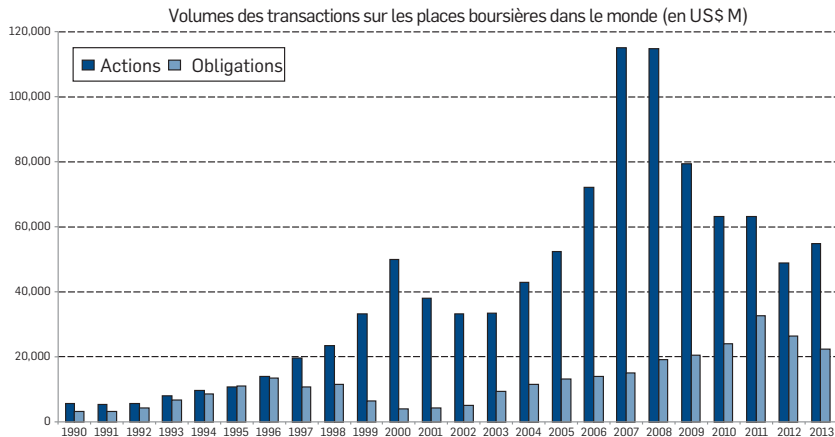
Top 10 des places boursières selon la capitalisation des sociétés cotées en 2002 et 2013

(en US\$ M)



Source: World Federation of Exchanges members

# LE DÉVELOPPEMENT DES MARCHÉS FINANCIERS



Source: World Federation of Exchange members

# PLAN

## 1. Généralités

## 2. Introduction

### 2.1 Quelques définitions

### 2.2 L'intermédiation financière

### 2.3 Le système financier

### 2.4 Un peu de théorie financière

### 2.5 Agents et comportements

## 3. La finance en avenir certain

### 3.1 Rappels sur les taux

### 3.2 Un peu de mathématiques financières

## 4. Conclusion

# LES FONCTIONS DU SYSTÈME FINANCIER

R. Merton et Z. Bodie listent six fonctions pour un système financier :

- ▶ Fonction de règlement
  - ▶ mise à disposition des individus de moyens de paiement : carte de crédit, chèques, virements
- ▶ Fonction de financement
  - ▶ mise en commun de fonds individuels afin de financer des projets de grandes tailles
- ▶ Fonction d'épargne et endettement
  - ▶ permet de répartir les ressources dans le temps, l'espace et les différents secteurs économiques

# LES FONCTIONS DU SYSTÈME FINANCIER

- ▶ Fonction de gestion du risque
  - ▶ Via des produits d'épargne collective, les intermédiaires permettent une diversification des investissements
  
- ▶ Fonction d'information
  - ▶ Une petit nombre d'intermédiaires redistribuent une information difficile d'accès à des millions d'investisseurs pour un faible coût
  
- ▶ Fonction de réduction des conflits
  - ▶ La présence de gestionnaires entre l'investisseur et l'acheteur permet de limiter les conflits

# LE RÔLE DES BANQUES

## Segmentation old school

- ▶ Banque commerciale
  - ▶ collecte les ressources du public et prête aux entreprises
- ▶ Banque d'affaire
  - ▶ apporte des conseils en fus-ac, en gestion de patrimoine et joue un rôle d'intermédiaire pour le placement en action et obligataire

Le regroupement des banques commerciales et d'affaire en grand conglomérat a engendré une **nouvelle segmentation**

- ▶ Banques de détail
  - ▶ s'adresse aux particuliers et aux petites et moyennes entreprises : intermédiation entre les agents avec un excédent de financement et ceux avec un besoin
  - ▶ segment très concurrentiel avec peu de marges et une forte diversification des micro-services

# LE RÔLE DES BANQUES

## ► Banque d'investissement

- accès au marché d'actions
  - assistance aux grandes entreprises pour les opérations boursières (introduction en bourse, augmentation de capital...)
- accès au marché obligataire
  - assistance aux grandes entreprises pour les opérations de levée de dette
- conseil en fusions et acquisitions
  - assistance aux grandes entreprises dans les opérations d'acquisition
- accès au financement bancaires
  - offre aux grandes entreprises de crédits syndiqués (plusieurs banques assurent le crédit), ligne bilatérales (emprunt direct à la banque), financement structurés

## ► Banque de gestion d'actifs

- s'adresse aux particuliers fortunés et aux investisseurs institutionnels

# PLAN

## 1. Généralités

## 2. Introduction

### 2.1 Quelques définitions

### 2.2 L'intermédiation financière

### 2.3 Le système financier

### 2.4 Un peu de théorie financière

### 2.5 Agents et comportements

## 3. La finance en avenir certain

### 3.1 Rappels sur les taux

### 3.2 Un peu de mathématiques financières

## 4. Conclusion



# L'EFFICIENCE DES MARCHÉS EN THÉORIE

## ► Définition

- Un marché est dit efficient si le prix (des titres financiers qui s'y échangent) reflète à tout moment l'ensemble de l'information pertinente disponible

## ► Autrement dit

- Le prix intègre à chaque instant les conséquences des événements
- Le prix reflète également les anticipations sur les événements futurs

## ► Conséquence

- L'évolution du prix est **imprévisible**
  - ⇒ tous les événements connus ou anticipés sont déjà intégrés dans le prix

## ► Dynamique du prix

- Seul un événement non-anticipé que nous appellerons **choc** sera à l'origine des variations du prix
  - La meilleure représentation de la dynamique du prix est donc le prix à la période précédente + un choc aléatoire
  - ⇒ On parle de **marche aléatoire** ou de **marche au hasard**

# L'EFFICIENCE DES MARCHÉS DANS LA PRATIQUE

- ▶ L'efficience des marchés est une hypothèse (HEM)
  - ▶ Valider ou invalider cette hypothèse anime la recherche en finance
  - ▶ Ce débat sur la dynamique des prix fut mis à l'honneur en 2013
    - ⇒ Nobel de E. Fama, P.L. Hansen et R. Shiller
- ▶ Les **chartistes** s'opposent à l'HEM
  - ⇒ Efficacité de l'analyse technique ?
- ▶ L'HEM repose sur l'idée d'une **information publique**
  - ⇒ Qu'en est-il de l'information leakage ?
- ▶ La présence d'une information privée n'invalide pas l'HEM si cette information n'influence pas le prix
  - ⇒ Si les autorités des marchés fonctionnent bien oui, sinon... ?

# L'EFFICIENCE DES MARCHÉS DANS LA PRATIQUE

- ▶ Dans la pratique, les marchés peuvent expérimenter des degrés d'efficacité variables
- ▶ On peut supposer qu'un marché sera d'autant plus efficace que
  - ▶ les coûts de transactions seront faibles
    - ⇒ la faiblesse des coûts de transaction permet un ajustement très rapide du prix vers l'équilibre de marché
  - ▶ le marché sera liquide
    - ⇒ un actif qui s'échange facilement permettra une meilleure circulation de l'information
  - ▶ les investisseurs seront rationnels
    - ⇒ en présence d'une nouvelle information, l'agent réagit de manière cohérente et maximise son utilité
  - ▶ A différentes fonctions d'utilité, on peut associer différents comportements des agents

# PLAN

## 1. Généralités

## 2. Introduction

### 2.1 Quelques définitions

### 2.2 L'intermédiation financière

### 2.3 Le système financier

### 2.4 Un peu de théorie financière

### 2.5 Agents et comportements

## 3. La finance en avenir certain

### 3.1 Rappels sur les taux

### 3.2 Un peu de mathématiques financières

## 4. Conclusion

# LA COUVERTURE

- ▶ Le comportement de **couverture** (hedging) consiste à chercher une protection contre un risque
- ▶ L'utilisation de produits dérivés peut permettre de se couvrir contre un risque
  - ▶ Une entreprise européenne qui exporte aux USA peut se couvrir en vendant à terme du \$  
⇒ pour cela elle peut utiliser un **swap de change** (forex swap)
- ▶ Selon les marchés et les situations, les stratégies de couverture peuvent devenir très complexes

# LA SPÉCULATION

- ▶ Le comportement de **spéculation** s'oppose à la couverture puisque l'agent accepte le risque
- ▶ Les spéculateurs construisent souvent leurs anticipations sur des convictions où de l'analyse technique du risque
  - ▶ De ce comportement découle la devise **Buy low, sell high, go golf!**
- ▶ Si ce comportement peut avoir des effets néfastes, par d'autres aspects, il est utile au bon fonctionnement du marché
  - ⇒ e.g. un agent recherchant une couverture va pouvoir trouver une contrepartie grâce au spéculateur
- ▶ Lorsque les spéculateurs dominent un marché par leur nombre, on parle de **marché spéculatif**
- ▶ Ce type de marché peut conduire à des dynamiques auto-entretenues et in fine, dégénérer en **bulle spéculative**
  - ⇒ En éclatant la bulle peut déstabiliser le système et créer une crise financière

# L'ARBITRAGE

- ▶ **L'arbitrage** consiste à exploiter les anomalies du marché pour dégager un profit tout en éliminant le risque
- ▶ Exemple
  - ▶ Un arbitragiste constate que le prix de l'or au comptant (spot) est inférieur au cours à terme
  - ▶ Il a donc intérêt à acheter de l'or aujourd'hui et à le vendre sur le marché à terme à l'aide d'un **contrat Futures**
  - ▶ L'arbitragiste réalise un profit immédiat et sans risque si :
    - ▶ l'opération couvre le coût de l'emprunt pour acheter l'or
    - + le coup de stockage de l'or sur la durée du contrat
  - ▶ Par ses opérations, l'arbitragiste entraîne
    - ▶ une pression à la hausse du prix sur le cours spot
    - ▶ une pression à la baisse sur le cours à terme
    - ⇒ opérations en faveur de l'HEM

# LA FINANCE EN AVENIR CERTAIN



# PLAN

## 1. Généralités

## 2. Introduction

### 2.1 Quelques définitions

### 2.2 L'intermédiation financière

### 2.3 Le système financier

### 2.4 Un peu de théorie financière

### 2.5 Agents et comportements

## 3. La finance en avenir certain

### 3.1 Rappels sur les taux

### 3.2 Un peu de mathématiques financières

## 4. Conclusion

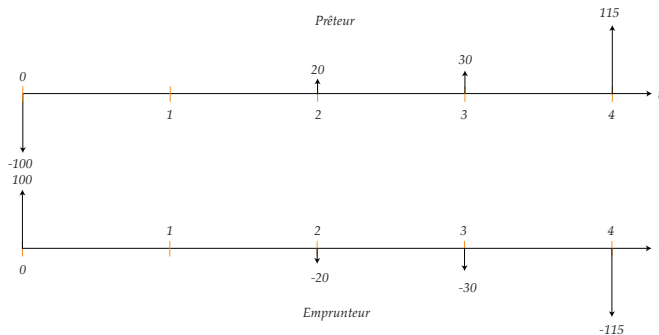
# FLUX DE TRÉSORERIE

- ▶ Une opération d'investissement ou de souscription est définie par l'échéancier des flux qu'elle génère
- ▶ Un flux de trésorerie est une somme d'argent transférée d'un agent à un autre
  - ▶ flux positif : encaissement
  - ▶ flux négatif : décaissement
- ▶ L'investisseur est rémunéré par un taux d'intérêt qui définit la rentabilité du placement
- ▶ Pour l'emprunteur, le taux d'intérêt est un coût
- ▶ Le taux d'intérêt est défini pour une unité de temps : e.g. l'année

# CHRONIQUE DE FLUX

## Exemple

- Soit un emprunt de 100 en  $t = 0$
- On considère des remboursements annuels
  - de 0, 20, 30, 115
  - en  $t = 1, 2, 3, 4$



# OPÉRATION À DEUX FLUX

Soit une opération sur une période allant de  $t = 0$  à  $t = 1$

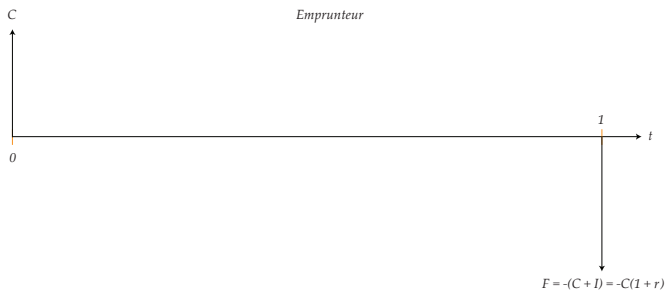
► On note

►  $C$  le capital prêté en 0

►  $F$  le flux final : remboursement de  $C$  et intérêts

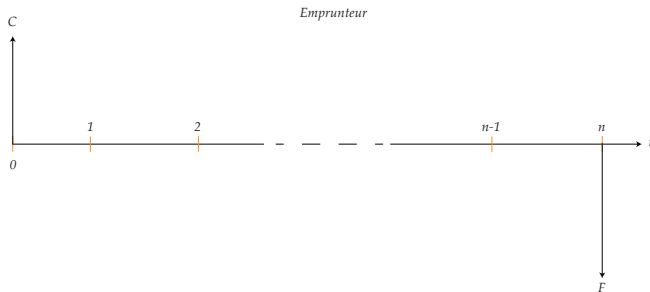
$$\Rightarrow I = F - C$$

►  $r$  dénotera le taux d'intérêt, dit **taux proportionnel**



# OPÉRATION À DEUX FLUX SUR N PÉRIODES

Soit une opération sur une période de six mois



- Pour un taux défini mensuellement on aura  $n = 6$
- Pour calculer les intérêts deux méthodes possibles :
  - la méthode des **intérêts simples (proportionnels)**
  - la méthode des **intérêts composés (capitalisés)**

# LES INTÉRÊTS SIMPLES

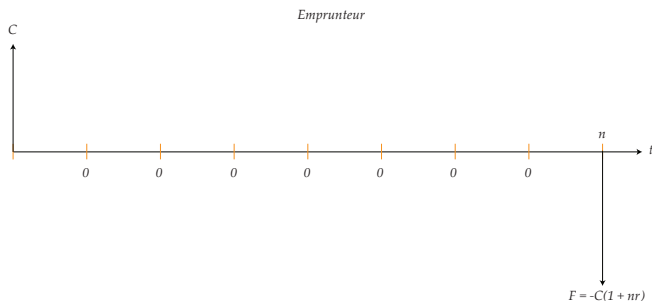
Soit un emprunt d'un capital  $C$  au taux  $r$  entre  $t = 0$  et  $t = n$

► Si on a un remboursement de  $C$  et  $I$  en  $t = n$

⇒  $I$  est proportionnel à  $r$  et on a  $I = C \times r \times n$

► On a donc  $F = -(C + C \times r \times n) = -C(1 + r \times n)$

⇒ le taux  $r$  est qualifié de **taux proportionnel**



# CONVENTION DE DURÉES

Il est fréquent que la durée de l'opération ne soit pas un entier au regard de la référence du taux :  $n \in \mathbb{R}$

► Pour calculer la durée de l'opération, notée  $T$ , il existe  $\neq$  conventions

⇒ la convention **exact/exact** :  $T = Nj/Na$

- $Nj$  la durée de l'opération en jours
- $Na$  le nombre de jours exact dans l'année

⇒ convention **exact/360** :  $T = Nj/360$

- cette approche augmente artificiellement la durée et les intérêts
- ⇒ convention souvent utilisée quand  $T < 1$

⇒ convention **30/360**

- cette approche présume des mois de 30 jours

⇒ convention **exact/365**

- cette approche omet les années bissextiles

## EXEMPLE : INTÉRÊTS SIMPLES

Soit un emprunt d'un capital  $C = 1000$  sur une durée de 6 mois avec  $r = 5\%$  (annuel)

- L'emprunt démarre au 1/01 et s'achève au 30/06 et l'année n'est pas bissextile : sur combien de jours court l'emprunt ?



## EXEMPLE : INTÉRÊTS SIMPLES

Soit un emprunt d'un capital  $C = 1000$  sur une durée de 6 mois avec  $r = 5\%$  (annuel)

- ▶ L'emprunt démarre au 1/01 et s'achève au 30/06 et l'année n'est pas bissextile : sur combien de jours court l'emprunt ?
  - ▶  $Nj = 181$
- ▶ Quelle est la durée en convention exact/exact ?

## EXEMPLE : INTÉRÊTS SIMPLES

Soit un emprunt d'un capital  $C = 1000$  sur une durée de 6 mois avec  $r = 5\%$  (annuel)

- ▶ L'emprunt démarre au 1/01 et s'achève au 30/06 et l'année n'est pas bissextile : sur combien de jours court l'emprunt ?
  - ▶  $Nj = 181$
- ▶ Quelle est la durée en convention exact/exact ?
  - ▶  $T = 181/365 = 0.49589$
- ▶ Quel est le montant des intérêts ?

## EXEMPLE : INTÉRÊTS SIMPLES

Soit un emprunt d'un capital  $C = 1000$  sur une durée de 6 mois avec  $r = 5\%$  (annuel)

- ▶ L'emprunt démarre au 1/01 et s'achève au 30/06 et l'année n'est pas bissextile : sur combien de jours court l'emprunt ?
  - ▶  $Nj = 181$
- ▶ Quelle est la durée en convention exact/exact ?
  - ▶  $T = 181/365 = 0.49589$
- ▶ Quel est le montant des intérêts ?
  - ▶  $I = 1000 \times (181/365) \times 5\% = 24.79$

# LES INTÉRÊTS COMPOSÉS

Soit un emprunt d'un capital  $C$  au taux  $r$  entre  $t = 0$  et  $t = n$

► A présent, les intérêts sont calculés à la fin de chaque périodes puis ajoutés au capital  
⇒ les intérêts sont capitalisés et produisent des intérêts au taux  $r$

► Pour une opération d'une période ( $n = 1$ ) on a alors :

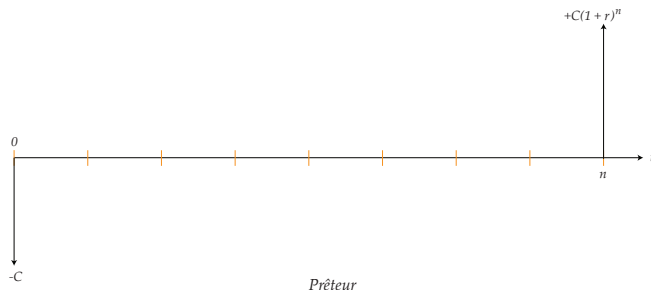
- $-C$  en période 0
- $+C(1 + r)$  en période 1

► Pour une opération sur deux périodes ( $n = 2$ ) on a alors :

- $-C$  en période 0
- rien en période 1
- $[C(1 + r)](1 + r) = C(1 + r)^2$  en période 2

# LES INTÉRÊTS COMPOSÉS

En poursuivant cette logique pour une opération sur  $n$  périodes on a



- ▶ Avec une durée non entière on a  $F = C(1+r)^T$
- ▶ Pour les intérêts on a  $I = C(1+r)^T - C = C((1+r)^T - 1)$
- ▶ Comme  $r$  est associé à une **capitalisation**, on parle de **taux actuariel**

## EXEMPLE : INTÉRÊTS COMPOSÉS

Soit un capital de 1000€ capitalisés au taux de 7% annuel

- Au terme 10,25ans quelle flux produisent-ils ?

## EXEMPLE : INTÉRÊTS COMPOSÉS

Soit un capital de 1000€ capitalisés au taux de 7% annuel

- ▶ Au terme 10,25ans quelle flux produisent-ils ?
  - ▶  $1000 \times (1.07)^{10.25} = 2000.71$
- ▶ Quel montant d'intérêt  $I$  produisent-ils ?

## EXEMPLE : INTÉRÊTS COMPOSÉS

Soit un capital de 1000€ capitalisés au taux de 7% annuel

- ▶ Au terme 10,25ans quelle flux produisent-ils ?
  - ▶  $1000 \times (1.07)^{10.25} = 2000.71$
- ▶ Quel montant d'intérêt  $I$  produisent-ils ?
  - ▶ 1000.71
- ▶ Capitalisé trimestriellement sur la même durée, combien obtient-on pour  $I$  ?



## EXEMPLE : INTÉRÊTS COMPOSÉS

Soit un capital de 1000€ capitalisés au taux de 7% annuel

- ▶ Au terme 10,25ans quelle flux produisent-ils ?
  - ▶  $1000 \times (1.07)^{10.25} = 2000.71$
- ▶ Quel montant d'intérêt  $I$  produisent-ils ?
  - ▶ 1000.71
- ▶ Capitalisé trimestriellement sur la même durée, combien obtient-on pour  $I$  ?
  - ▶ Le taux est alors  $7/4\% = 1.75$  par trimestre sur 41 trimestres et produit  $I = 1036.63$
- ▶ Comment expliquer ce résultat ?

## EXEMPLE : INTÉRÊTS COMPOSÉS

Soit un capital de 1000€ capitalisés au taux de 7% annuel

- ▶ Au terme 10,25ans quelle flux produisent-ils ?
  - ▶  $1000 \times (1.07)^{10.25} = 2000.71$
- ▶ Quel montant d'intérêt  $I$  produisent-ils ?
  - ▶ 1000.71
- ▶ Capitalisé trimestriellement sur la même durée, combien obtient-on pour  $I$  ?
  - ▶ Le taux est alors  $7/4\% = 1.75$  par trimestre sur 41 trimestres et produit  $I = 1036.63$
- ▶ Comment expliquer ce résultat ?
  - ▶ Contrairement aux intérêts simples, le fait que le taux soit annuel ou trimestriel modifie les flux de trésorerie et donc le montant des intérêts

# VALEUR ACQUISE ET VALEUR PRÉSENTE

- La **valeur acquise ou valeur future (VF)** est le montant final ( $C + I$ ) récupéré par le prêteur à échéance

- Si  $r$  est proportionnel :  $F = C(1 + rT)$
- Si  $r$  est actuariel :  $F = C(1 + r)^T$

- Inversement, la **valeur présente ou valeur actuelle (VA)** est donnée par

- Si  $r$  est proportionnel :

$$C = \frac{F}{1 + rT}$$

- Si  $r$  est actuariel :

$$C = \frac{F}{(1 + r)^T}$$

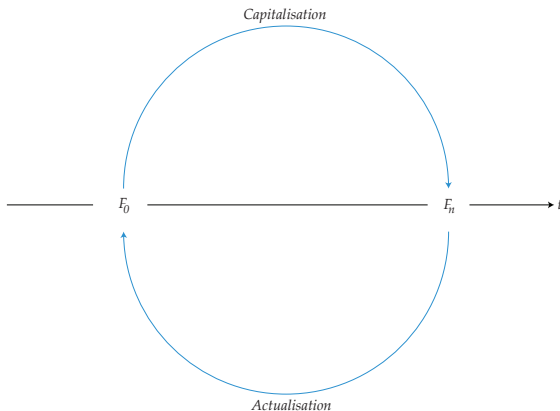
⇒ La **VA** est un outil précieux car il permet de répondre à la question :

- Pour un taux de rendement exigé donné  $r$ , l'investissement est-il intéressant ?

# VALEUR ACQUISE ET VALEUR PRÉSENTE

VA : L'actualisation va convertir une valeur future en une valeur d'aujourd'hui

VF : La capitalisation va projeter une valeur d'aujourd'hui en valeurs futures



# TAUX DE RENDEMENT

- Le taux de rendement peut être déduit des valeurs acquise et présente

- Si  $r$  est proportionnel :

$$r_p = \frac{F - C}{C \times T}$$

- Si  $r$  est actuariel :

$$r_a = \left( \frac{F}{C} \right)^{1/T} - 1$$

- Nous verrons par la suite que  $r_a$  est un **taux de rentabilité interne**

## MODALITÉ DE PAIEMENTS : POST-COMPTÉS

Les intérêts peuvent être payés en fin ou en début de période

- ▶ Dans le premier cas on parle de taux post-compté
  - ▶ Exemple : soit un emprunt à intérêts post-comptés sur 60 jours avec
    - ▶  $C = 1000\text{€}$
    - ▶ un taux annuel proportionnel base 360 de  $r = 3.5\%$
- ⇒ le flux final est alors de ?

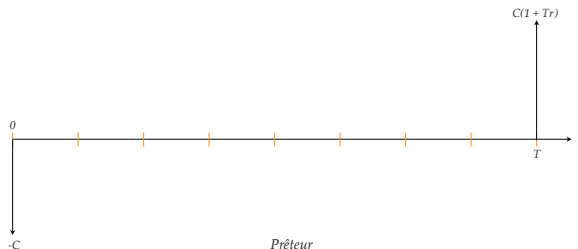
## MODALITÉ DE PAIEMENTS : POST-COMPTÉS

Les intérêts peuvent être payés en fin ou en début de période

- Dans le premier cas on parle de taux post-compté
- Exemple : soit un emprunt à intérêts post-comptés sur 60 jours avec
  - $C = 1000\text{€}$
  - un taux annuel proportionnel base 360 de  $r = 3.5\%$

⇒ le flux final est alors de ?

$$-1000\left(1 + 3.5\% \times \frac{60}{360}\right) = -1005.83$$



# MODALITÉ DE PAIEMENTS : PRÉCOMPTÉS

- Dans le deuxième cas on parle de taux précompté

⇒ Le flux initial est d'un montant égal à  $C$  diminué des intérêts  $I$

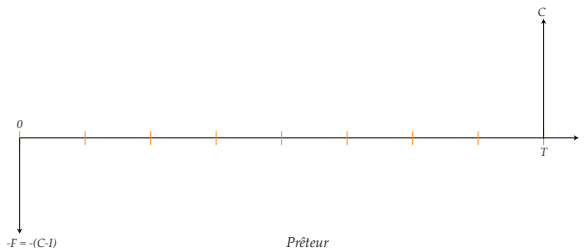
- Il faut donc calculer le montant des intérêts  $I$

- Méthode du **taux d'escompte** : on applique le taux  $r$  prorata temporis et on a donc

$$F = C - rCT = C(1 - rT)$$

- Méthode du **taux in fine** : les intérêts sont réduits pour compenser le fait qu'ils sont payés d'avance

⇒ On considère  $F = C/(1 + rT)$  et on a donc  $I = C - C/(1 + rT) = CrT/(1 + rT)$





## MODALITÉ DE PAIEMENTS : PRÉCOMPTÉS

► Exemple 1 : soit un emprunt à intérêts pré-comptés sur 60 jours

►  $C = 1000$

► un **taux d'escompte** annuel  $r = 3.5\%$  sur une base 360

⇒ Le montant des intérêts est donc de

## MODALITÉ DE PAIEMENTS : PRÉCOMPTÉS

► Exemple 1 : soit un emprunt à intérêts pré-comptés sur 60 jours

►  $C = 1000$

► un **taux d'escompte** annuel  $r = 3.5\%$  sur une base 360

⇒ Le montant des intérêts est donc de

$$\Rightarrow I = 1000 \times 3.5\% \times 60/360 = 5.83$$

⇒ Le flux initial est alors de

## MODALITÉ DE PAIEMENTS : PRÉCOMPTÉS

► Exemple 1 : soit un emprunt à intérêts pré-comptés sur 60 jours

►  $C = 1000$

► un **taux d'escompte** annuel  $r = 3.5\%$  sur une base 360

⇒ Le montant des intérêts est donc de

$$\Rightarrow I = 1000 \times 3.5\% \times 60/360 = 5.83$$

⇒ Le flux initial est alors de

$$\Rightarrow F = -(1000 - 5.83) = -994.17$$

► Exemple 2 : soit un emprunt à intérêts pré-comptés sur 60 jours

►  $C = 1000$

► un **taux in fine** annuel  $r = 3.5\%$  sur une base 360

⇒ Le montant des intérêts est donc de

## MODALITÉ DE PAIEMENTS : PRÉCOMPTÉS

### ► Exemple 1 : soit un emprunt à intérêts pré-comptés sur 60 jours

►  $C = 1000$

► un **taux d'escompte** annuel  $r = 3.5\%$  sur une base 360

⇒ Le montant des intérêts est donc de

$$\Rightarrow I = 1000 \times 3.5\% \times 60/360 = 5.83$$

⇒ Le flux initial est alors de

$$\Rightarrow F = -(1000 - 5.83) = -994.17$$

### ► Exemple 2 : soit un emprunt à intérêts pré-comptés sur 60 jours

►  $C = 1000$

► un **taux in fine** annuel  $r = 3.5\%$  sur une base 360

⇒ Le montant des intérêts est donc de

$$I = \frac{1000 \times 3.5\% \times 60/360}{1 + 3.5\% \times 60/360} = 5.80$$

⇒ Le flux initial est alors de  $F = -(1000 - 5.80) = -994.20$

⇒ légèrement plus favorable à l'emprunteur car **taux in fine**

## LES TAUX DANS LA PRATIQUE

Durée	Type d'opération	Base de calcul intérêts	Base de calcul durée
Court terme: $T < 1$ an	Opérations bancaires	Simples avec taux d'escompte ou <i>in fine</i>	exact/exact ou exact/360
	Opérations de marché	Simples avec taux <i>in fine</i>	exact/360
Moyen et long terme: $T > 1$ an	Toutes opérations	Composés i.e. taux actuariel	exact/exact ou exact/365 ou 30/360

# FRÉQUENCES DES VERSEMENTS

- ▶ Jusqu'à présent, on a supposé  $r$  annuel et un flux terminal
- ⇒ Dans la pratique, les fréquences de versements sont diverses
- ▶ Avec une taux annuel de 6%, 1€ donne 1,06€ en 1 an
- ▶ Voici l'évolution d'1€ capitalisé **mensuellement** à 6%

$t = 0$	1/12	2/12	3/12	4/12	5/12	6/12	7/12	8/12	9/12	10/12	11/12	1 an
1€	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.036	1.040	1.046	1.051	1.056	1.062

## FORMULE DU TAUX ÉQUIVALENT

- Comment comparer 2 taux avec des fréquences différentes ?

⇒ Formule d'équivalence : ramène un taux non-annuel à une fréquence annuelle

- Si le taux est proportionnel c'est très simple :

- $r_{eq} = nr_n$  avec  $r_{eq}$  le taux équivalent annuel et  $r_n$  le taux pour une fréquence de versement  $n$

- Si le taux est actuariel :

- $r_{eq} = (1 + r_m)^m - 1$

- Exemple : est-ce plus intéressant de placer 1€ au taux de 1% mensuel ou au taux de 6.2% semestriel ?

## FORMULE DU TAUX ÉQUIVALENT

- Comment comparer 2 taux avec des fréquences différentes ?

⇒ Formule d'équivalence : ramène un taux non-annuel à une fréquence annuelle

- Si le taux est proportionnel c'est très simple :

- $r_{eq} = nr_n$  avec  $r_{eq}$  le taux équivalent annuel et  $r_n$  le taux pour une fréquence de versement  $n$

- Si le taux est actuariel :

- $r_{eq} = (1 + r_m)^m - 1$

- Exemple : est-ce plus intéressant de placer 1€ au taux de 1% mensuel ou au taux de 6.2% semestriel ?

⇒ Pour la capitalisation mensuelle on obtient

$$r_{eq} = (1 + 0.01)^{12} - 1 = 0.1268 = 12.68\%$$

⇒ Pour la capitalisation semestrielle on obtient

$$r_{eq} = (1 + 0.062)^2 - 1 = 0.1278 = 12.78\%$$



# FORMULE DU TAUX ÉQUIVALENT

- Dans certains cas, les séquences d'intérêts sont payées plusieurs fois par an

⇒ elles sont alors calculées sur la base d'un taux annuel  $r$  fractionné sur une base proportionnelle

- Pour  $n$  versements chaque séquence d'intérêt est calculée à partir du taux  $r/n$
- De fait, le taux actuariel équivalent annuel  $r_{eq}$  est différent de  $r$

$$r_{eq} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

- Qu'arrive t-il si la fréquence des séquences d'intérêts payés augmente ?

# COMPORTEMENT DU TAUX ÉQUIVALENT

- Pour un taux donné (e.g. 6%) on voit que  $r_{eq}$  augmente avec la fréquence

<i>Fréquence</i>	<i>n</i>	<i>Taux équivalent</i>
<i>Annuelle</i>	1	6.00000%
<i>Semestrielle</i>	2	6.09000%
<i>Trimestrielle</i>	4	6.13614%
<i>Mensuelle</i>	12	6.16778%
<i>Hebdomadaire</i>	52	6.17998%
<i>Quotidienne</i>	365	6.18313%

- Comment se comporte  $r_{eq}$  quand la fréquence tend vers  $\infty$  ?

⇒ Il faut étudier la limite de la formule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

# TAUX ÉQUIVALENT ET CONVERGENCE

- Simplifions la formule en passant par l'exponentiel du log

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 = e^{n \ln(1 + \frac{r}{n})} - e^{\ln(1)} = e^{n \ln(1 + \frac{r}{n})} - 1$$

- Or,  $\ln(1 + x) \approx x + o(x)$  avec  $o(x)$  les termes tendant vers 0 plus vite que  $x$  dans le développement limité (DL) de  $\ln(1 + x)$  autour de 0

$$\Rightarrow \text{DL autour 0 : } f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$$

$\Rightarrow$  Pour  $\ln(1 + x)$  on a effectivement :

# TAUX ÉQUIVALENT ET CONVERGENCE

- Simplifions la formule en passant par l'exponentiel du log

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 = e^{n \ln(1 + \frac{r}{n})} - e^{\ln(1)} = e^{n \ln(1 + \frac{r}{n})} - 1$$

- Or,  $\ln(1 + x) \approx x + o(x)$  avec  $o(x)$  les termes tendant vers 0 plus vite que  $x$  dans le développement limité (DL) de  $\ln(1 + x)$  autour de 0

$$\Rightarrow \text{DL autour 0 : } f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$$

$\Rightarrow$  Pour  $\ln(1 + x)$  on a effectivement :

$$\ln(1 + x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \dots + o(x^k)$$

- En retenant un développement à l'ordre 1, il s'en suit que

$$(1 + r/n)^n - 1 = e^{n \ln(1 + \frac{r}{n})} - 1 = e^{n(\frac{r}{n} + o(n^{-1}))} - 1 = e^{r + no(n^{-1})} - 1$$

- La limite est alors simple à calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{r + no(n^{-1})} = e^r - 1$$

$\Rightarrow$  Dans notre exemple on obtient alors  $r_{eq} = e^{6\%} - 1 = 6.18365\%$

# TAUX ÉQUIVALENT ET TEMPS CONTINU

- ▶ Supposons que la fréquence des versements tend vers  $\infty$ 
  - ▶ Cela revient à dire que la capitalisation opère en continu
  - ⇒ On parle alors de capitalisation en temps continu
- ▶ Exemple : On place  $X$  euros sur 1 an au taux continu  $r_c$  on aura
  - ▶  $(1 + r_{eq})X = e^{r_c} X$  dans 1 an
- ▶ Exemple : On place  $X$  euros sur  $T$  années au taux continu  $r_c$  on aura
  - ▶  $(1 + r_{eq})^T X = e^{r_c \times T} X$  dans 1 an
- ▶ De ce raisonnement on peut déduire la valeur future (VF) et la valeur actuelle (VA)

$$F = Ce^{r_c \times T}, \quad C = Fe^{-r_c \times T}$$

# TAUX CONTINU

- Parler de taux d'intérêts continu revient à dire que

- le taux est proportionnel sur un intervalle  $(t, t + dt)$   
⇒ on applique  $r$  à la valeur acquise sur la durée  $dt$

- A chaque incrément du temps la **VA** augmente de

$$dV = rV(t)dt$$

- Il s'agit d'une équation différentielle dont la solution est

$$V(t) = V(0)e^{rt} = Ce^{rt}$$

# TAUX CONTINUS

- ▶ Cette équation différentielle traduit le fait que  $V(t)$  croît exponentiellement au taux

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = r$$

- ▶ Pour un capital  $C$  placé entre 0 et  $T$ , la capitalisation en continu se traduit par
  - ▶ un flux final de  $F = Ce^{rT}$
  - ⇒ une séquence de flux  $\{-C, Ce^{rT}\}$
- ▶ Dans la pratique, les taux continus ne servent pas
- ▶ Ils sont néanmoins très utilisés en théorie pour les avantages mathématiques qu'ils apportent

# FORMULES D'ÉQUIVALENCE

► Comment comparer deux taux avec des bases différentes ?

► Notations

- taux continu (exact) :  $r_c$
- taux actuariel :  $r_a$
- taux proportionnel (in fine - exact) :  $r_{p1}$
- taux proportionnel (in fine - 360) :  $r_{p2}$
- taux précompté exact :  $r_e$

► Pour une durée  $T$  donnée, les taux sont équivalent si

$$e^{r_c \times T} = (1 + r_a)^T = 1 + r_{p1} T = 1 + r_{p2} T \frac{Na}{360} = \frac{1}{1 - r_e T}$$

avec  $T = Nj/Na$



# PLAN

## 1. Généralités

## 2. Introduction

### 2.1 Quelques définitions

### 2.2 L'intermédiation financière

### 2.3 Le système financier

### 2.4 Un peu de théorie financière

### 2.5 Agents et comportements

## 3. La finance en avenir certain

### 3.1 Rappels sur les taux

### 3.2 Un peu de mathématiques financières

## 4. Conclusion

# OPÉRATIONS MULTI-FLUX

- ▶ Soit une opération générant  $n$  flux  $F_0, F_{t_1}, F_{t_2}, \dots, F_{t_n}$ 
  - ▶ Le nombre de flux est quelconques
  - ▶ Ces flux peuvent intervenir à des instants quelconques
    - ▶ Les flux ne sont pas forcément équidistants
- ▶ En se plaçant du point de vue de l'investisseur
  - ▶ le premier flux  $F_0$  sera toujours négatif...
  - ▶ ... suivi de flux positifs  $\underline{F} = F_{t_1}, F_{t_2}, \dots, F_{t_n}$
- ▶ L'opposé doit être considéré du point de vue de l'emprunteur

# ACTUALISATION

- ▶ On se place ici dans le cadre d'intérêts actualisés au taux  $r$
- ▶ On cherche la **VA** d'une séquence de  $n$  flux à partir de l'instant courant noté  $t = 0$ 
  - ▶ En étendant les résultats obtenus pour un flux unique on obtient

$$\begin{aligned} VAN(r) &= F_0 + \frac{F_{t_1}}{(1+r)^{t_1}} + \frac{F_{t_2}}{(1+r)^{t_2}} + \cdots + \frac{F_{t_n}}{(1+r)^{t_n}} \\ &= F_0 + \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i}} \end{aligned}$$

- ▶ Cette formule est également appelée **valeur actuelle nette (VAN)**
  - ▶ **nette** car on défalque la mise de fonds initiale  $F_0 < 0$
- ▶ Si tous les flux sont identiques et équidistants on obtient

$$VAN(r) = F_0 + \sum_{t=1}^n \frac{F}{(1+r)^t} = F_0 + F \times \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+r)^t}$$

# VAN ET TITRE FINANCIER

- ▶ Soit un investisseur sur un marché financier
- ▶ Appelons **valeur de marché**, notée  $V_0$ , la valeur à laquelle un titre peut être acheté
- ▶ Supposons que ce titre génère des flux constants et équidistants d'un montant  $F$
- ▶ Avec  $r$  le taux de rentabilité exigé par l'investisseur, la **VAN** est donnée par

$$VAN(r) = V_0 + F \times \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+r)^t}$$

- ▶ Si  $VAN(r) > 0$ , alors l'investisseur sera tenté d'acheter ce titre

⇒ cela aura tendance à faire augmenter  $V_0$  et donc diminuer sa  $VAN$

- ▶ Si  $VAN(r) < 0$ , alors l'investisseur ne souhaitera pas l'acheter

⇒ si de nombreux investisseurs ont le même  $r$ , alors la demande pour ce titre diminuera et sa valeur  $V_0$  également

⇒ sa  $VAN$  augmentera

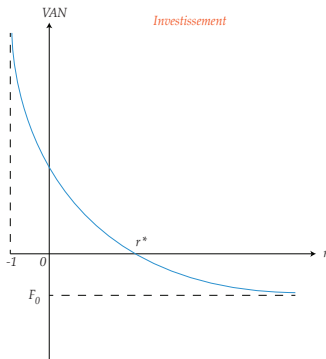
⇒ On en déduit que sur un marché efficient la  $VAN$  est attirée vers 0

# ACTUALISATION : ASYMPTOTIQUE

- L'étude des limites de  $VAN(r)$  est intéressante :

$$\lim_{r \rightarrow -1} VAN(r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} VAN(r) = F_0 < 0$$

- Remarquons graphiquement que la VAN s'annule pour une unique valeur de  $r$  notée  $r^*$



*Le taux d'actualisation tient compte de la préférence pour le présent...*

*Si cette préférence est élevée, la rémunération exigée sera élevée : on tient compte de cela en dévalorisant d'autant l'euro futur grâce à un taux d'actualisation qui sera élevé (car il intervient au dénominateur)*

*A mesure que le taux de rentabilité "r" exigé par l'investisseur augmente, la VAN décroît car les flux futurs sont alors dévalorisés (la Valeur Présente diminue) pour un investissement donné*

*La VAN s'annule pour une valeur "r\*" dont nous verrons plus tard qu'elle correspond au "taux de rentabilité interne"*

# ACTUALISATION : DÉVELOPPEMENT

- Dans le cas de flux identiques et équidistants, la formule se simplifie
  - il s'agit d'une suite géométrique de raison  $1/(1+r)$  et qui nous donne

$$VAN(r) = F_0 + F \times \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+r)^t} = F_0 + F \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

- Proof : soit une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $a$ 
  - La somme des  $n$  premiers termes nous donne

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n$$

- En soustrayant  $qS_n$  à  $S_n$  il vient

$$S_n(1 - q) = a - aq^n \Rightarrow S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- L'application de ce raisonnement à  $VAN(r)$  nous donne le résultat

## ACTUALISATION : EXEMPLE

- ▶ Soit un investissement de 1200€ au taux  $r = 10\%$
- ▶ Les annuités sont de 360€ pendant 10 ans
  - ▶ La valeur présente des flux futurs est donnée par

# ACTUALISATION : EXEMPLE

- Soit un investissement de 1200€ au taux  $r = 10\%$
- Les annuités sont de 360€ pendant 10 ans
- La valeur présente des flux futurs est donnée par

$$VA(r) = F \sum_{t=1}^{10} \frac{1}{(1.1)^t} = F \times \frac{1 - (1.1)^{-10}}{0.1} = F \times 6.14457 = 2212.05$$

- La VAN est donc donnée par



## ACTUALISATION : EXEMPLE

- Soit un investissement de 1200€ au taux  $r = 10\%$
- Les annuités sont de 360€ pendant 10 ans
- La valeur présente des flux futurs est donnée par

$$VA(r) = F \sum_{t=1}^{10} \frac{1}{(1.1)^t} = F \times \frac{1 - (1.1)^{-10}}{0.1} = F \times 6.14457 = 2212.05$$

- La VAN est donc donnée par

$$VAN(r) = F_0 + 360 \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+r)^t} = -1200 + 360 \times 6.14457 = 1012.05$$

- Cela signifie que le gain net dégagé par l'investissement de 1200€ aujourd'hui est de 1012.05€

# ACTUALISATION : TEMPS CONTINU

- ▶ On a vu le calcul d'intérêt capitalisés sur la base d'un taux continu
- ▶ Dans le cas de l'actualisation, pour un intervalle  $(t, t + dt)$ 
  - ▶ le flux est donnée par  $F(t)dt$
  - ▶ la valeur présente du flux est  $e^{-rt} F(t)dt$
- ▶ On en déduit alors la valeur présente pour toute la séquence, i.e. sur  $(0, T)$

$$VA(r) = \int_0^T F(t)e^{-rt} dt$$

## ACTUALISATION : EXEMPLE

- ▶ Soit un investissement engendrant un flux continu de 10€ par unité de temps sur 5 ans, actualisé au taux annuel de 10%
- ▶ D'après les formules d'équivalence,  $r_c = \ln(1 + r_a) = 9.53\%$ 
  - ▶ En effet :  $e^{r_c T} = (1 + r_a)^T \Rightarrow \ln(e^{r_c T}) = T \ln(1 + r_a)$
- ▶ D'après la formule d'actualisation en temps continu on a alors

## ACTUALISATION : EXEMPLE

- Soit un investissement engendrant un flux continu de 10€ par unité de temps sur 5 ans, actualisé au taux annuel de 10%
- D'après les formules d'équivalence,  $r_c = \ln(1 + r_a) = 9.53\%$ 
  - En effet :  $e^{r_c T} = (1 + r_a)^T \Rightarrow \ln(e^{r_c T}) = T \ln(1 + r_a)$
- D'après la formule d'actualisation en temps continu on a alors

$$\begin{aligned} VA(r) &= 10 \int_0^5 e^{-0.0953t} dt \\ &= 10 \times \left[ -\frac{1}{0.0953} e^{-0.0953t} \right]_0^5 \\ &= \frac{10}{0.0953} (1 - e^{-0.0953 \times 5}) = 39.77 \end{aligned}$$

## TAUX ACTUARIEL : PRINCIPE

Dans le cadre d'une opération à deux flux :

- Nous avons introduit le **taux de rentabilité interne (TRI)** comme le taux, pour un capital placé  $C$ , qui donne un flux terminal  $F$  en  $T$
- Plus formellement il s'agit du taux  $r^*$  tel que  $F = C(1 + r^*)^T$  ou encore

$$-C + \frac{F}{(1 + r^*)^T} = 0$$

- $r^*$  est également appelé **taux de rentabilité actuariel (TRA)** : taux qui annule la valeur présente nette de l'échéancier

Dans le cadre d'une opération à  $n$  flux il s'agit du taux  $r^*$  définit tel que

$$VAN(r^*) = F_0 + \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1 + r^*)^{t_i}} = 0, \quad F_0 < 0$$

## TAUX ACTUARIEL : CALCUL

Ici  $F_0$  et  $F$  sont de même signe d'où le signe  $-$  devant  $F_0$

- Dans le cas général de flux divers et irréguliers, l'équation du TRA n'a généralement pas de solution analytique

⇒ solution numérique

- Dans le cas d'une séquence à flux constant  $\{-F_0, F, \dots, F\}$

$$-F_0 + \sum_{t=1}^n \frac{F}{(1+r^*)^t} = 0 \Rightarrow \frac{1 - (1+r^*)^{-n}}{r^*} = \frac{F_0}{F}, \quad F_0 > 0$$

- la valeur exacte de  $r^*$  peut être calculée

- Dans le cas d'une séquence à deux flux  $\{-F_0, F\}$

$$-F_0 + \frac{F}{(1+r^*)} = 0 \Rightarrow r^* = \frac{F - F_0}{F_0}$$

# CHOIX D'INVESTISSEMENT : LA VAN

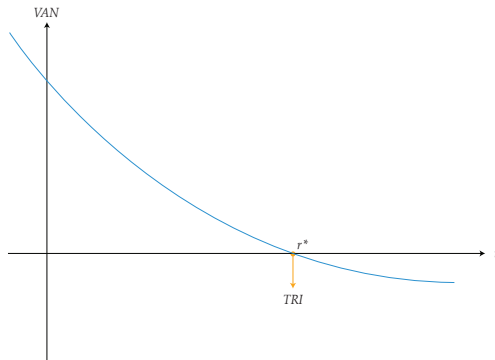
- La VAN est un critère de choix pour un investissement

$$VAN(r) = F_0 + \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i}} = 0$$

- la VAN représente l'accroissement net de la valeur induite par l'investissement
- On peut alors déduire **deux règles** constituant le critère de la VAN
  - 1 un investissement ne doit être retenu que si sa VAN est positive
  - 2 entre plusieurs investissement on doit retenir celui dont la VAN est la plus grande
- Les graphiques du slide “actualisation asymptotique” montrent la positivité et la négativité de la VAN en fonction de  $r$

# CHOIX D'INVESTISSEMENT : LE TRI

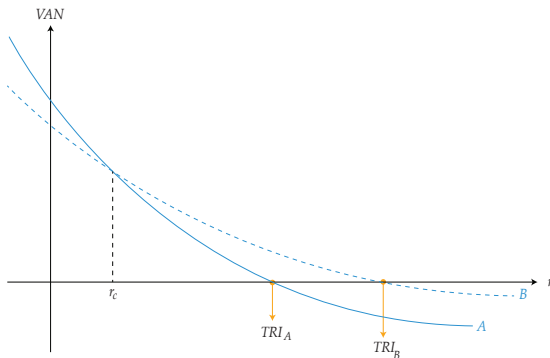
- Le TRI représente également un critère
  - l'investissement doit être accepté ssi le TRI qu'il génère est supérieur au taux de rendement  $r$  exigé par l'investisseur
  - ⇒ à l'équilibre, le TRI est identique au taux de rentabilité exigé
  - ⇒  $VAN = 0$





# LES LIMITES DU TRI

- ▶ Si les investissements sont mutuellement exclusifs, le TRI n'est pas pertinent
  - ▶ le TRI nous dit de choisir  $B$
  - ▶ pourtant  $B$  n'est préférable à  $A$  que pour  $r > r_c$   
⇒ impossible de conclure juste avec le TRI et sans la VAN
- ▶ Le TRI est pourtant très utilisé car pas de choix à faire pour  $r$



## CONCLUSION

## ET MAINTENANT...

- On passe au choix dans l'incertain...