



# MÉTHODES ET INSTRUMENTS DE LA FINANCE

Master 1 MBFA

Partie 3

Gilles de Truchis  
&  
Elena Dumitrescu

Site : [www.varennnes-ecofin.com/](http://www.varennnes-ecofin.com/)



# PLAN DES CHAPITRES

## 1. La théorie des options

### 1.1 Introduction

### 1.2 Organisation des marchés d'option

### 1.3 Relations de parité et arbitrage

### 1.4 Stratégies de couvertures

### 1.5 Introduction au modèle binomial

### 1.6 Modèle binomial multi-période

## 2. Conclusion

# LA THÉORIE DES OPTIONS

# PLAN

## 1. La théorie des options

### 1.1 Introduction

#### 1.2 Organisation des marchés d'option

#### 1.3 Relations de parité et arbitrage

#### 1.4 Stratégies de couvertures

#### 1.5 Introduction au modèle binomial

#### 1.6 Modèle binomial multi-période

## 2. Conclusion

# PRODUITS OPTIONNELLES

- ▶ Jusqu'à présent, les actifs considérés se limitaient aux actions
- ▶ Nous avons pourtant vu qu'il existait de nombreux types d'actif ...
  - ▶ ... et parmi eux, des produits avec des composantes optionnelles
    - ⇒ obligations convertibles
    - ⇒ caps (option pour une couverture contre une hausse d'un taux d'intérêt)
    - ⇒ floor (option pour une couverture contre une baisse d'un taux d'intérêt)
    - ⇒ produits hybrides
    - ⇒ ...

# PRODUITS OPTIONNELLES

- ▶ La théorie des options permet notamment d'étendre la théorie du choix de portefeuille aux cas de ces actifs particuliers
- ▶ Deux grandes approches sont possibles en fonction de la nature du temps
  - ▶ temps discret (objet de ce chapitre introductif)
  - ▶ temps continu (abordé au prochain semestre)

# DÉFINITION

## Définition

Une **option** est un titre conférant le droit et non l'obligation, **d'acheter** ou **de vendre** un actif à un prix convenu à l'avance (**strike price**) et pendant ou à l'échéance d'une période définie au préalable.

- ⇒ l'acheteur verse au vendeur une somme d'argent (la **prime**) en date initiale
- ⇒ il reçoit en contrepartie, à une date future, un flux positif ou nul (le **payoff**) dont le montant dépend de l'évolution d'un **actif sous-jacent**
- On dira que l'option est **standard** si le sous-jacent ne délivre aucun flux de trésorerie (i.e. dividende, coupon...) avant l'échéance

# DÉFINITION

- ▶ Cette définition englobe un grand nombre de titre dits **contingents** (des titres qui existent si certaines conditions sont réalisées)
- ⇒ de cette catégorie nous n'aborderons que les options classiques (ou **vanille**)
- ▶ Vous aborderez plus tard les options **exotiques** dont les règles sont plus complexes
  - ⇒ Asiatique (le payoff dépend du prix moyen du sous-jacent sur une partie de  $T - t_0$ )
  - ⇒ Barrier (commence ou cesse d'exister selon que le sous-jacent passe une barrière)
  - ⇒ Digitale (payoff discontinu selon que l'option finisse dans ou en-dehors de la monnaie)
  - ⇒ Forward Start (option entrant en activité qu'à une date ultérieure : e.g. stock-options)
  - ⇒ Lookback (le payoff dépend du niveau max ou min atteint par le sous-jacent)
  - ⇒ ....



# L'OPTION VANILLE

- ▶ Il existe deux types d'option vanille
    - ▶ L'option d'achat dite **call** : confère le droit et non l'obligation d'acheter un actif sous-jacent au prix d'exercice  $K$  (**strike price**)
    - ▶ L'option de vente dite **put** : confère le droit et non l'obligation de vendre un actif sous-jacent au prix d'exercice  $K$  (**strike price**)
  - ▶ Le **strike price**  $K$  est fixé à la date d'émission de l'option ( $t = 0$ )
  - ▶ L'option prend fin à la date dite **d'exercice** ou de **maturité** ( $t = T$ )
  - ▶ Il existe deux catégories d'option vanille
    - ▶ L'option dite **américaine** : l'option peut être exercée à tout moment dans l'intervalle  $(0, T]$
    - ▶ L'option dite **européenne** : l'option peut être exercée uniquement à la date d'expiration  $T$
- ⇒ Les options américaines sont plus utilisées mais plus difficiles à évaluer

# L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

- ▶ Pour sa simplicité, nous allons nous concentrer sur l'option européenne
- ▶ Notons  $S_t$  la valeur de l'actif sous-jacent en  $t \leq T$  (e.g. une action)
- ▶ Le détenteur d'un **call européenne** a le droit :
  - ▶ d'acheter en  $T$  à un prix  $K$  l'action valant sur le marché  $S_T$
  - ▶ Cette option d'achat n'est intéressante que si  $S_T > K$ 
    - ▶ si tel est le cas, sa position vaudra  $S_T - K$
    - ▶ si tel n'est pas le cas il abandonnera l'option et sa position sera nulle

# L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

- Pour sa simplicité, nous allons nous concentrer sur l'option européenne
- Notons  $S_t$  la valeur de l'actif sous-jacent en  $t \leq T$  (e.g. une action)
- Le détenteur d'un **put européenne** a le droit :
  - de vendre en  $T$  à un prix  $K$  l'action valant sur le marché  $S_T$
  - Cette option de vente n'est intéressante que si  $S_t < K$ 
    - si tel est le cas, sa position vaudra  $K - S_T$
    - si tel n'est pas le cas il abandonnera l'option et sa position sera nulle

# VALEUR DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

- On peut résumer la valeur d'un **call européenne** ou d'un **put européenne** ainsi :

$$C(S_T) = \max(S_T - K; 0) = \Psi_T^c$$

$$P(S_T) = \max(K - S_T; 0) = \Psi_T^p$$

le flux terminal est positif ou nul

- Nous avons ici raisonné du point de vue du **détenteur** de l'option

- Du point de vue de **l'émetteur** nous avons l'opposé

$$-C(S_T) = -\Psi_T^c$$

$$-P(S_T) = -\Psi_T^p$$

le flux terminal est négatif ou nul

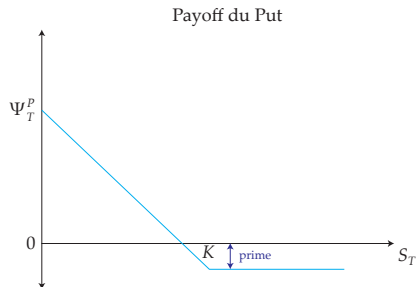
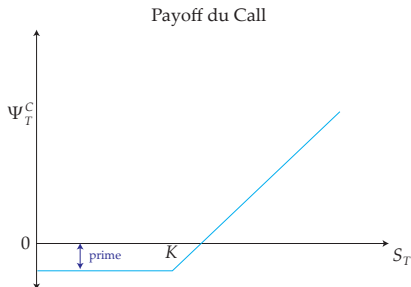
- Pour le détenteur comme pour l'émetteur, le flux terminal  $\Psi_T^c$  s'appelle le **payoff**

# PAYOFF DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

## ► Analyse du **payoff** si la prime est nulle

- Pour un **Call**, le payoff est nul tant que  $S_T < K$  puis croît avec la valeur du sous-jacent
- Pour un **Put**, le payoff décroît tant que  $S_T < K$  jusqu'à atteindre  $K$  et devient alors nul

## ► Analyse graphique du **payoff** avec prime non-nulle



## EXEMPLE AVEC L'ACHAT D'UN CALL

- ▶ Soit un investisseur qui achète un Call européen sur l'action Alliance
  - ▶ Le strike price est de  $K = 100\text{€}$  pour un volume de 100 actions
  - ▶ En  $t = 0$ , l'action vaut 98€
  - ▶ L'échéance  $T$  est dans 4 mois
  - ▶ La prime (i.e. le prix de l'option) est de 5€ par action
  - ▶ Le coût total du contrat optionnel est donc de 500€
  - ▶ Notons que la prime de l'option est définie pour une unité de sous-jacent
- ▶ Si en  $T$  l'action vaut moins de 100€, que fait l'investisseur ?

## EXEMPLE AVEC L'ACHAT D'UN CALL

- ▶ Soit un investisseur qui achète un Call européen sur l'action Alliance
    - ▶ Le strike price est de  $K = 100\text{€}$  pour un volume de 100 actions
    - ▶ En  $t = 0$ , l'action vaut 98€
    - ▶ L'échéance  $T$  est dans 4 mois
    - ▶ La prime (i.e. le prix de l'option) est de 5€ par action
    - ▶ Le coût total du contrat optionnel est donc de 500€
    - ▶ Notons que la prime de l'option est définie pour une unité de sous-jacent
  - ▶ Si en  $T$  l'action vaut moins de 100€, que fait l'investisseur ?
- ⇒ il n'exerce pas l'option et perd 500€

## EXEMPLE AVEC L'ACHAT D'UN CALL

- Si en  $T$  l'action vaut, e.g. 115€, que fait l'investisseur ?



## EXEMPLE AVEC L'ACHAT D'UN CALL

- ▶ Si en  $T$  l'action vaut, e.g. 115€, que fait l'investisseur ?
  - ▶ exercer l'option en faisant l'acquisition de 100 actions à 100€
  - ▶ économiser ainsi 15€ par action
  - ▶ revendre immédiatement ces 100 actions et engendrer un gain de 1500€
  - ▶ récupérer un profit net de  $1500 - 500 = 1000€$

## EXEMPLE AVEC L'ACHAT D'UN PUT

- ▶ Soit un investisseur qui achète un Put européen sur l'action Sanofi
  - ▶ Le strike price est de  $K = 70\text{€}$  pour un volume de 100 actions
  - ▶ En  $t = 0$ , l'action vaut  $65\text{€}$
  - ▶ L'échéance  $T$  est dans 3 mois
  - ▶ La prime (i.e. le prix de l'option) est de  $7\text{€}$  par action
  - ▶ Le coût total du contrat optionnel est donc de  $700\text{€}$
- ▶ Si en  $T$  l'action vaut plus de  $70\text{€}$ , que fait l'investisseur ?

## EXEMPLE AVEC L'ACHAT D'UN PUT

- ▶ Soit un investisseur qui achète un Put européen sur l'action Sanofi
  - ▶ Le strike price est de  $K = 70\text{€}$  pour un volume de 100 actions
  - ▶ En  $t = 0$ , l'action vaut 65€
  - ▶ L'échéance  $T$  est dans 3 mois
  - ▶ La prime (i.e. le prix de l'option) est de 7€ par action
  - ▶ Le coût total du contrat optionnel est donc de 700€
- ▶ Si en  $T$  l'action vaut plus de 70€, que fait l'investisseur ?
  - ▶ l'investisseur n'exerce pas l'option et perd donc 700€

## EXEMPLE AVEC L'ACHAT D'UN PUT

- Si en  $T$  l'action vaut, e.g. 55€, que fait l'investisseur ?

## EXEMPLE AVEC L'ACHAT D'UN PUT

- ▶ Si en  $T$  l'action vaut, e.g. 55€, que fait l'investisseur ?
  - ▶ exercer l'option en vendant 100 actions à 70€ au lieu de 55€
  - ▶ gagner ainsi 15€ par action et donc au total 1500€
  - ▶ récupérer un profit net de  $1500 - 700 = 800€$

# PRIME DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

- ▶ Question : comment déterminer **la prime** ?
  - ▶ En simplifiant, la prime dépend essentiellement de deux éléments
    - ▶ nous verrons par la suite que de nombreux facteurs interviennent
  - ▶ Le premier élément :
    - ▶ Pour une date  $t$  donnée, on peut déterminer la valeur qu'aurait l'option si elle arrivait à maturité en  $t$
- ⇒ Cette valeur dite **valeur intrinsèque** de l'option compose une partie de la prime

$$VI_t^C = \max(S_t - K; 0)$$

$$VI_t^P = \max(K - S_t; 0)$$

- ▶  $VI_t$  est virtuelle dans le cas d'une option européenne car l'exercice n'est possible qu'en  $T$

# PRIME DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

- ▶ Le second élément affectant la prime est le temps lui même
  - ▶ Pour une date  $t$  donnée, il apparaît que la proximité avec l'échéance (i.e.  $T - t$ ) est cruciale
  - ▶ En effet, il faut tenir compte des potentialités d'appréciation de l'option liées
    - ▶ à une hausse du sous-jacent pour un call
    - ▶ à une baisse du sous-jacent pour un put
- ⇒ Cette sensibilité de la prime au temps est appelée valeur temps :  $VT_t$
- ⇒ Plus l'échéance est éloignée, plus la  $VT$  est importante
- ▶ On peut alors définir la prime ainsi

$$\Pi_t = VI_t + VT_t$$

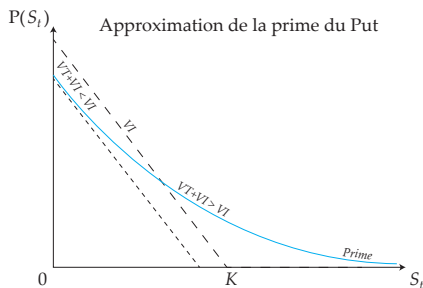
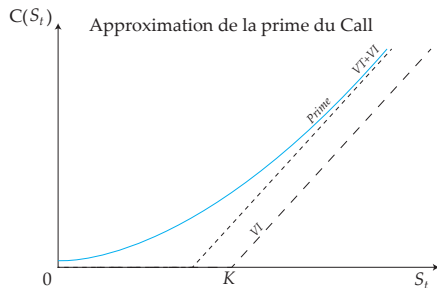
# PRIME DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

- ▶ Notons que pour une date  $t$ 
  - ▶ un Call est dit **dans la monnaie** (in the money) si  $S_t > K$
  - ▶ un Put est dit dans la monnaie si  $S_t < K$
- ▶ A l'inverse :
  - ▶ un Call est dit **hors de la monnaie** (out of the money) si  $S_t < K$
  - ▶ un Put est dit hors de la monnaie si  $S_t > K$
- ▶ Cas particulier
  - ▶ un Call ou un Put est **à la monnaie** (at the money) si  $S_t = K$



# PRIME DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

- Pour un  $t < T$  donné et donc une valeur temps donnée  $VT_t$ 
  - Pour une échéance  $t$ , la prime de l'option est en bleu
  - On reviendra plus tard sur le fait que  $VT$  puisse être négatif dans le cas du PUT européen



# PRIME DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

## ► Analyse graphique pour le Call

- à mesure que la valeur du sous-jacent se rapproche du strike price, la prime demandée augmente
- quand la valeur du sous-jacent dépasse le strike price, la prime augmente le long de  $VI$  de l'option augmentée de la valeur temps

## ► Analyse graphique pour le Put

- à mesure que la valeur du sous-jacent se rapproche du strike price, la prime demandée diminue le long de la  $VI$  de l'option augmentée de la valeur temps
- notons que la valeur temps est négative au début et positive par la suite (nous verrons plus tard pourquoi)
- quand la valeur du sous-jacent dépasse le strike price, la prime continue de diminuer jusqu'à tendre vers 0

# PLAN

## 1. La théorie des options

### 1.1 Introduction

### 1.2 Organisation des marchés d'option

### 1.3 Relations de parité et arbitrage

### 1.4 Stratégies de couvertures

### 1.5 Introduction au modèle binomial

### 1.6 Modèle binomial multi-période

## 2. Conclusion

# OPTION SUR ACTION

- ▶ Les options peuvent s'échanger de grès à grès ou sur des marchés organisés
  - ▶ Dans le premier cas on parle de marchés OTC (over the counter)
  - ▶ Dans le second cas, les principaux marchés sont
    - ▶ Chicago Board Options Exchange
    - ▶ Philadelphia Stock Exchange
    - ▶ American Stock Exchange
    - ▶ Pacific Exchange
    - ▶ International Securities Exchange
    - ▶ Marché des Options Négociables de Paris (MONEP)
  - ▶ Le MONEP est géré par NYSE-Euronext

# OPTION SUR ACTION

- ▶ Des milliers d'actions sont supports de contrats d'option sur ces marchés
- ▶ Le plus souvent, ces contrats donnent des droits sur des packages de 100 actions
  - ▶ Cela vient du fait que les actions s'échangent souvent par multiples de 100
- ▶ Sur le MONEP, les quantités de sous-jacent sont généralement liées à son prix
  - ▶ Si le sous-jacent cote 10€ l'option portera sur un nombre élevé de titres
  - ▶ Si le sous-jacent cote 150€ l'option portera sur un nombre plus faible de titres

# OPTION SUR DEVISES

- ▶ La majorité des options sur devises s'échange de gré à gré
- ▶ Néanmoins, quelques marchés organisés gèrent ce type de transactions
  - ▶ e.g. Philadelphia Stock Exchange
- ▶ Les échanges peuvent porter sur des options américaines comme européennes
- ▶ Ces options sont des alternatives aux contrats **Forward**
  - ▶ les Forward sont des Futures mais échangés de gré-à-gré

## OPTION SUR DEVISES

### ► Exemple d'application :

⇒ Une entreprise européenne cherche à se prémunir contre un risque de change

► ... lié à la réception à une date future d'une certaine somme en dollars

⇒ Pour cela l'entreprise peut acheter des Puts sur le dollars

► l'option doit arriver à maturité à la date du paiement reçu par l'entreprise

► cela garantit que la valeur des dollars obtenus ne sera pas inférieure au Strike price

► l'option agit donc comme une assurance, ce qui n'est pas le cas du Forward

► cette assurance a néanmoins un coût : la prime de l'option

# OPTION SUR DEVICES

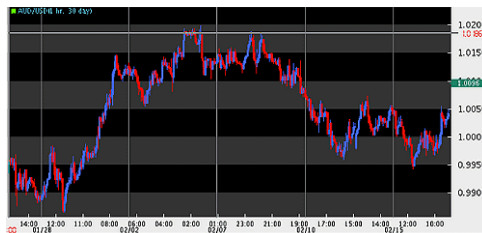
## ⇒ Explications

- ▶ En  $T$ , l'entreprise est payée en dollars et doit alors convertir cette somme en euro
- ▶ L'entreprise achète le droit de vendre en  $T$  des dollars à un taux de change garantissant une certaine valeur du dollar face à l'euro
- ▶ Ainsi, si l'euro est trop fort face au dollar en  $T$ , l'entreprise exercera l'option afin de convertir le paiement reçu en dollars à un taux de change plus avantageux que le taux de change spot  $S_T$
- ▶ A l'inverse, si l'euro est trop faible face au dollar en  $T$ , l'entreprise n'exercera pas l'option et convertira le paiement reçu en dollar au taux pratiqué sur le marché spot  $S_T$



# OPTION SUR DEVISES

- ▶ Exemple d'application :
  - ▶ Un trader cherche à shorter du dollars Australien (1M) contre de l'USD
  - ▶ Il prend une position longue sur un Put dans la monnaie (spot à 1.01865)
    - ▶ spot 1.01865
    - ▶ strike price 1.0200
    - ▶ échéance 1 mois
    - ▶ supposons une prime nulle pour simplifier
- ⇒ son opération est motivée par un **double top** à 1.0200 qui révèle une **résistance**
- ▶ Le cours spot devrait rester en dessous de la résistance, d'où l'intérêt de fixer un strike price à 1.0200



## OPTION SUR DEVISES

- ▶ Supposons qu'à échéance, le spot soit de 0.9950
- ▶ Le trader exerce l'option et convertit 1M AUD au taux  $\text{AUD/USD} = 1.0200$ 
  - ▶ il récupère ?

## OPTION SUR DEVISES

- ▶ Supposons qu'à échéance, le spot soit de 0.9950
- ▶ Le trader exerce l'option et convertit  $1M$  AUD au taux  $AUD/USD = 1.0200$ 
  - ▶ il récupère ?  
 $1,02M$  USD
  - ▶ il revend immédiatement au taux spot qui est de ?

## OPTION SUR DEVISES

- ▶ Supposons qu'à échéance, le spot soit de 0.9950
- ▶ Le trader exerce l'option et convertit  $1M$  AUD au taux  $AUD/USD = 1.0200$ 
  - ▶ il récupère?  
 $1,02M$  USD
  - ▶ il revend immédiatement au taux spot qui est de?  
 $USD/AUD = 1/0.9950 = 1.005025$
  - ▶ Combien récupère-t-il et dégage-t-il de profit ?

# OPTION SUR DEVISES

- Supposons qu'à échéance, le spot soit de 0.9950
- Le trader exerce l'option et convertit 1M AUD au taux  $AUD/USD = 1.0200$ 
  - il récupère ?  
 $1,02M$  USD
  - il revend immédiatement au taux spot qui est de ?  
 $USD/AUD = 1/0.9950 = 1.005025$
  - Combien récupère-t-il et dégage-t-il de profit ?  
 $1025125AUD$  pour un profit de  $25125AUD$



# OPTION SUR INDICES

- ▶ Il est possible de construire une option sur un indice
  - ▶ cela est intéressant car rappelons que l'indice n'est pas en soit un actif coté
  - ▶ en conséquence, à l'échéance de l'option, on assiste à une livraison en cash plutôt qu'un portefeuille reproduisant l'indice
- ▶ Les indices sur lesquels s'établissent le plus de contrats sont
  - ▶ S&P500
  - ▶ S&P100
  - ▶ Nasdaq 100
  - ▶ Dow Jones Industriel Average
- ▶ Sur le MONEP on trouve des options adossées au CAC40

# LES MARKET-MAKERS

- ▶ Lorsque les options s'échangent sur des marchés organisés
    - ▶ le recours aux market-markers est précieux
    - ▶ les market-makers vont permettre de fluidifier les échanges
  - ▶ Un market-maker affiche un prix d'achat et de vente et répond à la demande
    - ▶ le prix **bid** est le prix auquel il est prêt à acheter
    - ▶ le prix **ask** est le prix auquel il est prêt à vendre
  - ▶ le **bid-ask spread** (écart entre prix d'achat et de vente) est toujours négatif
    - ▶ prix de vente > prix d'achat pour assurer une rémunération au market-maker
  - ▶ Le market-maker est bénéfique car dans la fourchette il assure que
    - ▶ les participants au marché d'option trouveront une contre-partie
- ⇒ apporte de la liquidité au marché

## COÛT DE TRANSACTION ET BROKERS

- ▶ Sur un marché d'option organisé, il est fréquent de passer par un **broker**
- ▶ le **broker** va passer les ordres selon leurs types
  - ▶ ordre à tout prix : exécution immédiate
  - ▶ ordre à cours limité : définit le cours le moins favorable auquel l'ordre peut être exécuté
- ▶ La rémunération du **broker** représente un coût de transaction
  - ▶ ce coût se décompose en un coût fixe et un coût proportionnel

Montant de la transaction	Commission
< 2500 €	20 € + 2% du montant échangé
de 2500 € à 10 000 €	45 € + 1% du montant échangé
> 10 000 €	120 € + 0.25% du montant échangé



# WARRANTS

## ► Débouclage standard d'un call :

- 1 le détenteur (acheteur) du call annonce qu'il va exercer l'option
- 2 le vendeur du call acquiert donc les actions sur le marché secondaire
- 3 le vendeur du call revend (au prix d'exercice) ces actions au détenteur du call

## ► Un **Warrant** fonctionne différemment

- 1 le détenteur (acheteur) du call annonce qu'il va exercer l'option
  - 2 la société dont les actions sont support du warrant cède elle-même les titres
  - 3 la société émet donc de nouvelles actions et les vend au prix d'exercice au détenteur
- ⇒ le nombre de titres en circulation augmente

# STOCK-OPTION ET OBLIGATION CONVERTIBLE

- ▶ Les **stock-options** sont des options d'achat
  - ▶ Les stock-options sont émises par la société dont les actions sont le support
  - ▶ Les stock-options accordées aux cadres dirigeants avec l'objectif :
    - ▶ qu'ils agissent dans l'intérêt des actionnaires
  - ▶ Les **obligations convertibles** sont des obligations pouvant
    - ▶ être convertie en actions pendant certaines périodes, à une parité déterminée
- ⇒ il s'agit donc d'une obligation contenant une option d'achat sur les actions de la société émettrice
- ⇒ comme pour le warrant, le nombre de titres en circulation augmente si exercice

# LES MARCHÉS OTC

- ▶ Les transactions de grès-à-grès forment des marchés dit **OTC** (over the counter)
  - ▶ développement considérable depuis les années 80
  - ⇒ volume d'échange supérieur aux marchés organisés
- ▶ Inconvénient : pas de chambres de compensation (**clearing house**)
  - ⇒ exposition au risque de défaut
- ▶ Avantage : permet de répondre à des besoins clients spécifiques
  - ▶ les contrats peuvent être non-standard
  - ⇒ échéance, strike price, taille de contrat inhabituels...

# PLAN

## 1. La théorie des options

### 1.1 Introduction

### 1.2 Organisation des marchés d'option

### 1.3 Relations de parité et arbitrage

### 1.4 Stratégies de couvertures

### 1.5 Introduction au modèle binomial

### 1.6 Modèle binomial multi-période

## 2. Conclusion

# RELATION DE PARITÉ CALL-PUT STANDARD

- ▶ Considérons deux options standards (1 Call et 1 Put) adossées à une action
- ▶ Considérons également le marché des obligations zéro-coupons
  - ▶ Notons  $r$  le taux (sans risque) actuariel du titre zéro-coupon entre  $t$  et  $T$
- ▶ Considérons à présent deux portefeuilles ( $A$  et  $B$ ) ainsi composé :
  - $A$  composé du **Put** et du **sous-jacent**
  - $B$  composé du **Call** et d'une **obligation** délivrant  $K$  en  $T$

# RELATION DE PARITÉ CALL-PUT STANDARD

- Calculons la valeur du portefeuille  $A$  à échéance en  $T$

$$V_A(T) = S_T + \max(K - S_T, 0) = \max(S_T, K)$$

- Calculons la valeur du portefeuille  $B$  à échéance en  $T$

$$V_B(T) = K + \max(S_T - K, 0) = \max(S_T, K)$$

- Ce résultat établit une égalité entre la valeur du Put et Call
- en l'absence d'opportunité d'arbitrage, cette égalité est vrai pour tout  $t \leq T$ 
  - en effet, si  $V_A(t) \neq V_B(t)$  était possible, il serait possible de faire un profit sans risque
- e.g. si  $V_A(t) > V_B(t)$ , il suffit d'être long en  $B$  et de shorter  $A$  pour gagner  $V_A(t) - V_B(t)$

# RELATION DE PARITÉ CALL-PUT STANDARD

- Cette relation de parité nous amène au résultat suivant (si  $r$  discret)

$$P_t + S_t = \frac{K}{(1+r)^{T-t}} + C_t \Rightarrow C_t - P_t = S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

avec  $C_t = VI_t^C$  et  $P_t = VI_t^P$

- Ici, la valeur en  $t$  du zéro-coupon donnant  $K$  en  $T$  est donnée par

$$\frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

- En supposant  $r$  continu, on obtient

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

- Ici, la valeur en  $t$  du zéro-coupon donnant  $K$  en  $T$  est donnée par  $Ke^{-r(T-t)}$

# CONDITION D'ARBITRAGE ET MARCHÉ D'OPTION

- Cette égalité nous permet de déduire des conditions d'absence d'arbitrage

- Rappelons que  $P_t \geq 0$  ce qui pour le Call implique

$$C_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} + P_t \Rightarrow C_t \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

En effet, si tel n'était pas le cas on aurait  $P_t < 0$

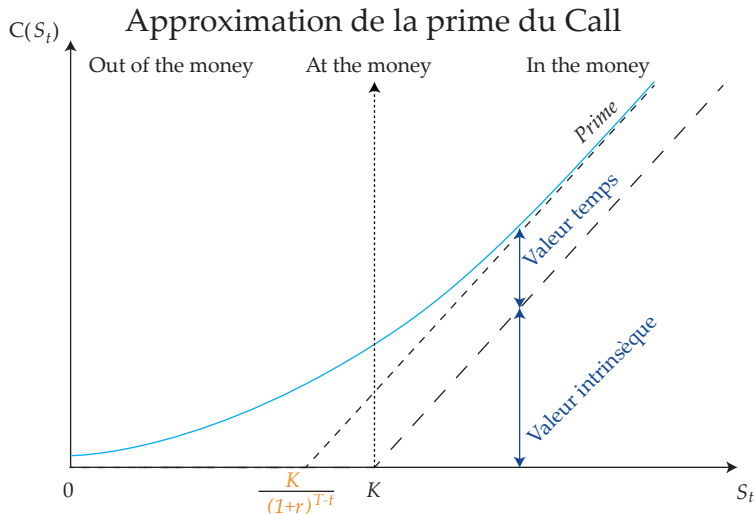
- Rappelons que  $C_t \geq 0$  ce qui pour le Put implique

$$P_t = C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)} \Rightarrow P_t \geq Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

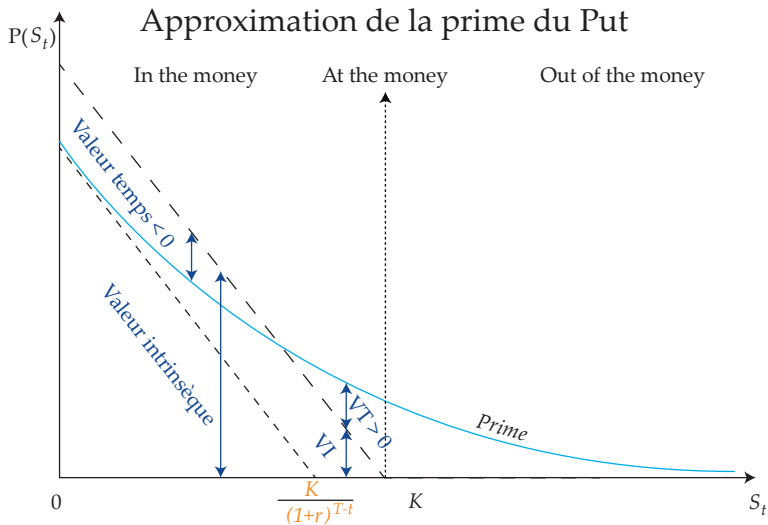
En effet, si tel n'était pas le cas on aurait  $C_t < 0$



## PRIME DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

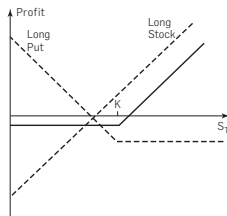


## PRIME DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE



# PRIME DE L'OPTION VANILLE EUROPÉENNE

- ▶ Dans le cas d'un Put européen fortement dans la monnaie,  $VT < 0$  est possible
- ▶ Pourquoi ?
  - ▶ la position de couverture est **longue**



- ▶ cette position est coûteuse en financement
  - ▶ elle doit être tenue jusqu'à échéance de l'option (car européenne)
- ⇒ cela affecte négativement la valeur de l'option

# CONDITION D'ARBITRAGE ET MARCHÉ D'OPTION

- ▶ Cas particulier d'un sous-jacent sur  $\mathbb{R}^+$  (e.g. action)
- ▶ Si  $S_t = 0$  alors  $S_{s \geq t} = 0$  sous peine d'opportunité d'arbitrage
  - ▶ En effet, si  $\mathbb{P}(S_{s \geq t} > 0) > 0$ , il suffit d'acheter le sous-jacent en  $t$  et de le revendre en  $s$  pour dégager avec certitude un profit non-négatif
- ▶ Dans le cas d'un Call,  $S_t = 0$  implique  $C_t = 0$  car  $C_t = \max(S_t - K; 0)$
- ▶ Dans le cas d'un Put,  $S_t = 0$  implique

$$P_t = Ke^{-r(T-t)} - S_t + C_t = Ke^{-r(T-t)}$$

car  $S_t = 0$  et  $C_t = 0$

# PLAN

## 1. La théorie des options

### 1.1 Introduction

### 1.2 Organisation des marchés d'option

### 1.3 Relations de parité et arbitrage

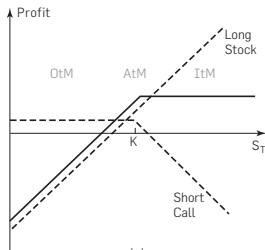
### 1.4 Stratégies de couvertures

### 1.5 Introduction au modèle binomial

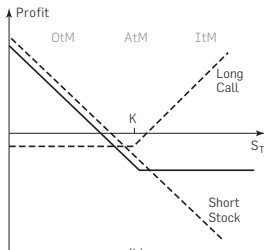
### 1.6 Modèle binomial multi-période

## 2. Conclusion

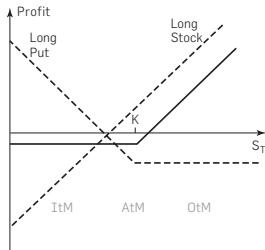
## UNE OPTION / UNE ACTION



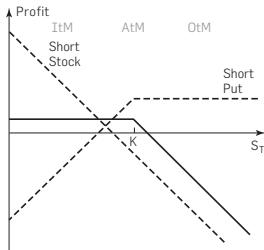
(a)



(b)



(c)



(d)

► pour simplifier supposons que  $S_0 \in (K + \varepsilon, K - \varepsilon)$  pour  $\varepsilon$  petit

# UNE OPTION / UNE ACTION

## ► Cas (a)

- dans le meilleur des cas, le profit du vendeur d'un Call est la prime
- en revanche, les pertes du vendeur d'un Call peuvent être **infinie**
  - si l'option est débouclée fortement dans la monnaie, le vendeur va devoir acheter à un prix très élevé ( $S_T \gg K$ ) le sous-jacent et le revendre au prix  $K$  au détenteur du Call
- en achetant le sous-jacent en  $t = 0$ , le vendeur du Call se couvre contre cette situation
  - en effet, si  $S_T \gg K$ , il détiendra un actif dont la valeur a fortement augmentée dans son portefeuille et pourra le revendre
- la coût de cette stratégie est un décaissement en  $t = 0$  de  $S_0$
- le risque de cette stratégie, c'est que si  $S_T \ll K$ , le vendeur du Call encaisse la prime mais perd  $|S_T - S_0|$ 
  - cependant, même dans le cas extrême ou  $S_T = 0$ , la perte est **finie**

# UNE OPTION / UNE ACTION

## ► Cas (b)

- dans le meilleur des cas, le profit de l'acheteur d'un Call est **l'infini**
- en revanche, l'acheteur d'un Call peut perdre la prime
  - si l'acheteur de l'option pense qu'il y a de forte chance que l'option finisse fortement en dehors de la monnaie ( $S_T \ll K$ ), il peut vouloir couvrir la perte de la prime
- en vendant (à découvert) le sous-jacent en  $t = 0$ , l'acheteur du Call se couvre contre cette situation en récupérant  $S_0$ 
  - en effet, si  $S_T \ll K$ , il pourra racheter le sous-jacent à un prix  $S_T < S_0$
  - il dégage alors un profit  $|S_0 - S_T|$  qui dans le cas limite où  $S_T = 0$  est  $S_0$
  - si  $S_T \ll K$ , ce profit lui permettra de couvrir la perte de la prime
- le risque de cette stratégie, c'est que si  $S_T \gg K$ , le vendeur perd  $|S_T - S_0|$ 
  - cependant, même dans le cas extrême où  $S_T = \infty$ , la perte est **finie** car couverte par le profit du Call



# UNE OPTION / UNE ACTION

## ► Cas (c)

- dans le meilleur des cas, le profit de l'acheteur d'un Put est **fini** et positif
- en revanche, l'acheteur d'un Put peut perdre la prime si  $S_T > K$ 
  - si l'acheteur de l'option pense qu'il y a de forte chance que l'option finisse fortement en dehors de la monnaie ( $S_T \gg K$ ), il peut vouloir couvrir la perte de la prime
- en achetant le sous-jacent en  $t = 0$ , l'acheteur du Put se couvre contre cette situation
  - en effet, si  $S_T \gg K$ , il pourra vendre le sous-jacent à un prix  $S_T > S_0$
  - il dégage alors un profit  $|S_T - S_0|$  qui dans le cas limite ou  $S_T = \infty$  est  $\infty$
  - si  $S_T \ll K$ , il détient un actif dont la valeur a chuté mais peut compenser partiellement cette perte en exerçant l'option
- le risque de cette stratégie, c'est que si  $S_T \ll K$ , l'acheteur du Put est perdant

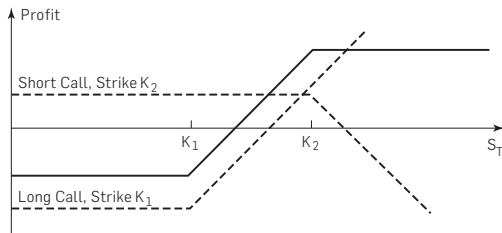
# UNE OPTION / UNE ACTION

## ► Cas (d)

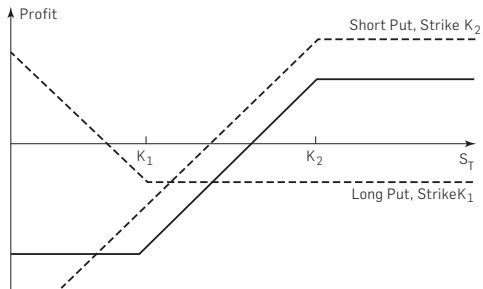
- dans le meilleur des cas, le profit du vendeur d'un Put est la prime
- en revanche, le vendeur d'un Put peut faire face à une perte finie si  $S_T \ll K$ 
  - si l'option déboucle fortement dans la monnaie, il devra acheter au prix  $K$  un actif qui en vaut  $S_T$
  - le vendeur du put peut donc vouloir couvrir cette perte s'il craint fortement qu'en  $T$ ,  $S_T \ll K$
- en vendant (à découvert) le sous-jacent en  $t = 0$ , le vendeur du Put se couvre contre cette situation
  - en effet, en  $t = 0$ , le vendeur du Put récupère  $S_0$
  - si  $S_T$  est fortement dans la monnaie,  $S_T \ll S_0$  ce qui implique un profit  $|S_0 - S_T|$
  - ce profit va compenser la perte liée à l'exercice du Put par l'acheteur
- le risque de cette stratégie est immense car si  $S_T = \infty$ , le vendeur du Put peut perdre  $\infty$

## LES BULL SPREADS

Profit from bull spread created using call options.

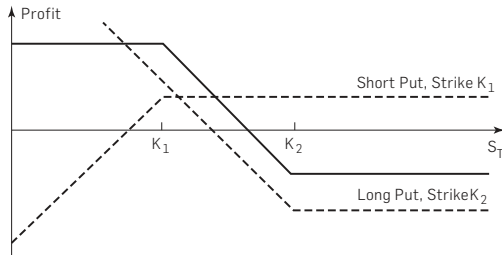


Profit from bull spread created using put options.

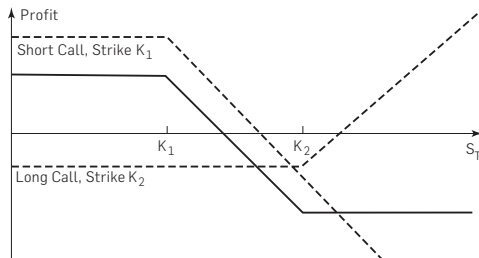


# LES BEAR SPREADS

Profit from bear spread created using put options.

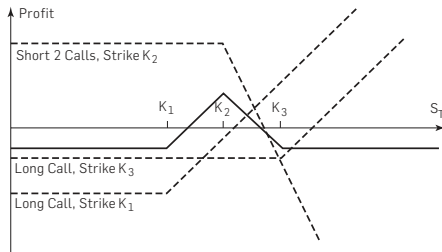


Profit from bear spread created using call options.

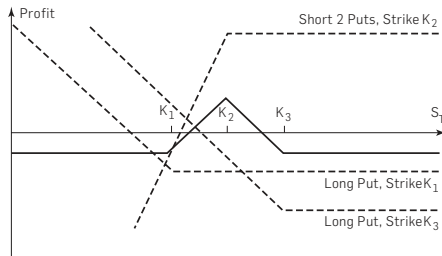


# LES BUTTERFLY SPREADS

Profit from butterfly spread using call options.

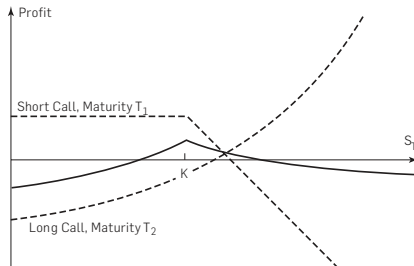


Profit from butterfly spread using put options.

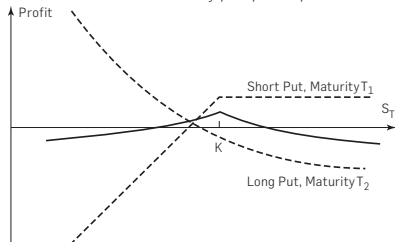


# LES CALENDAR SPREADS

Profit from calendar spread created using two call options, calculated at the time when the short-maturity call option expires.

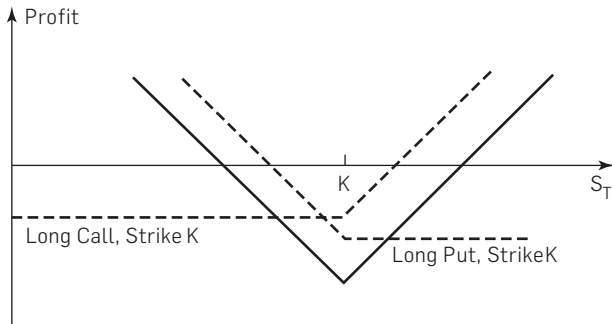


Profit from calendar spread created using two put options, calculated at the time when the short-maturity put option expires.



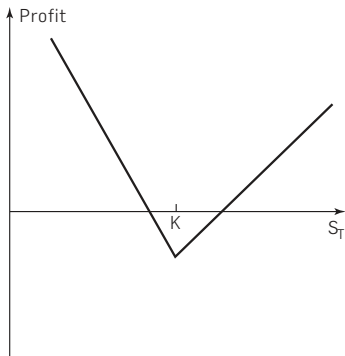
## LES STRADDLES

Profit from a straddle.

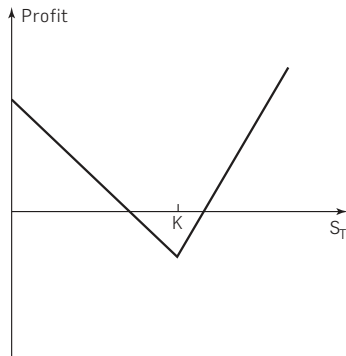


# LES STRIPS ET LES STRAPS

Profit from a strip and a strap.



Strip (one call + two puts)

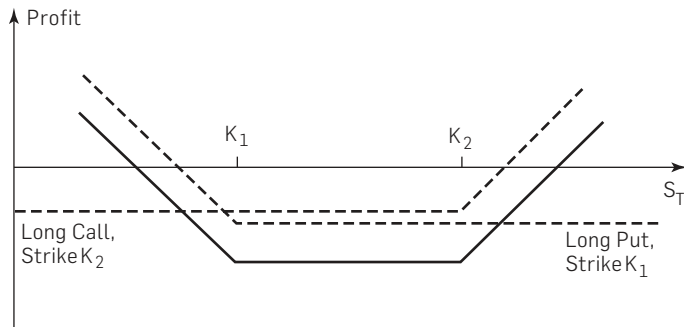


Strap (two calls + one put)



## LES STRANGLES

Profit from a strangle.



# PLAN

## 1. La théorie des options

### 1.1 Introduction

### 1.2 Organisation des marchés d'option

### 1.3 Relations de parité et arbitrage

### 1.4 Stratégies de couvertures

## 1.5 Introduction au modèle binomial

### 1.6 Modèle binomial multi-période

## 2. Conclusion

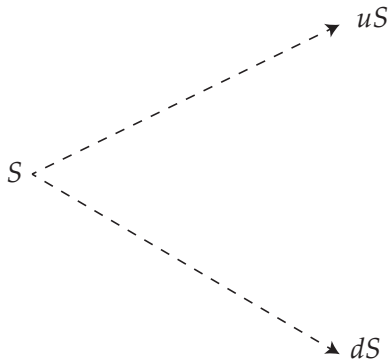
# L'ÉVALUATION DES OPTIONS

- ▶ L'évaluation des options est un enjeu crucial pour les investisseurs
- ▶ L'évaluation des options peut être très complexe
- ▶ Nous débuterons par un modèle très simplifié
- ▶ Ce modèle simplifié sera ensuite généralisé pour décrire le modèle binomial
  - ▶ modèle proposé par Cox, Ross et Rubinstein (1979)

# MODÈLE À DEUX ÉTATS ET UNE PÉRIODE

- ▶ On considère deux marchés
  - ▶ le marché d'un actif risqué, e.g. marché action, qui servira de support pour les options
  - ▶ le marché de l'actif sans risque, e.g. marché des obligations d'état zéro-coupons
- ▶ En  $t = 0$  on note  $S$  la valeur observée de l'action
- ▶ En  $t = 1$  l'action peut prendre deux valeurs
  - ▶  $uS$  si l'action prend de la valeur
  - ▶  $dS$  si l'action perd de la valeur
- ⇒  $u$  et  $d$  sont donc des rentabilités brutes  $(1 + R_u)$  ou  $(1 + R_d)$  représentant deux états possibles du monde : haussier ou baissier

## MODÈLE À UNE PÉRIODE



# COUVERTURE DANS LE MODÈLE À UNE PÉRIODE

- ▶ Considérons un actif sans risque générant un rendement  $r$  entre  $t_0$  et  $t_1$
- ▶ Sous peine d'opportunité d'arbitrage, on impose  $d < 1 + r < u$
- ▶ Construisons à présent un Call sur l'action de prix  $S$ , de strike price  $K$  et maturité 1
  - ▶ si l'état du monde en  $t = 1$  est haussier, le payoff est

$$C_1^u = \max(uS - K, 0)$$

- ▶ si l'état du monde en  $t = 1$  est baissier, le payoff est

$$C_1^d = \max(dS - K, 0)$$

- ▶ Nous allons à présent montrer que ce Call peut être dupliqué à l'aide d'une action et de l'actif sans risque
  - ▶ ce portefeuille dupliquant l'option pourra être utilisé comme **portefeuille de couverture**
  - ▶ le coût de ce **portefeuille de couverture** déterminera la **prime de l'option**

# COUVERTURE DANS LE MODÈLE À UNE PÉRIODE

- Soit le vendeur d'un Call en  $t = 0$  pouvant investir dans
  - une quantité  $\alpha$  d'action de prix  $S$
  - une quantité  $\beta$  d'actif sans risque dont le prix est normalisé à 1€
- On voit alors que  $\forall \alpha, \beta$  la valeur de son portefeuille en  $t = 0$  sera

$$V_0 = \alpha S + \beta$$

- En  $t = 1$ , la valeur de son portefeuille dépendra de l'état du monde

$$V_1^u = \alpha uS + \beta \text{ ou } V_1^d = \alpha dS + \beta$$

# COUVERTURE DANS LE MODÈLE À UNE PÉRIODE

- Afin de couvrir la vente du Call, on cherche à présent les valeurs de  $\beta$  et  $\alpha$  tel que

$$\alpha uS + \beta(1 + r) = C_1^u$$

$$\alpha dS + \beta(1 + r) = C_1^d$$

- En résolvant on obtient  $\alpha^*$  et  $\beta^*$ ,

$$\alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS} = \frac{\Delta C}{\Delta S}$$

$$\beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1 + r}$$

où  $\alpha^*$  est appelé **ratio de couverture**

- Ces quantités  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  permettent de construire :
  - un **portefeuille de couverture** ayant en  $t = 1$ , **quelque soit l'état du monde**, la même valeur que l'option
- ⇒ le vendeur du Call peut alors se couvrir en se procurant ce portefeuille en  $t = 0$ ,
- ⇒ en  $t = 1$  il vendra le portefeuille afin de régler le payoff de l'option avec la recette



# COUVERTURE DANS LE MODÈLE À UNE PÉRIODE

- Les solutions  $\beta^*$  et  $\alpha^*$  nous permettent de calculer  $V_0$

$$\begin{aligned} V_0 &= \alpha^* S + \beta^* \\ &= \frac{C_1^u - C_1^d}{u - d} + \frac{C_1^u - \alpha^* u S}{1 + r} \\ &= \frac{1}{1 + r} \left( C_1^u \frac{(1 + r) - d}{u - d} + C_1^d \frac{u - (1 + r)}{u - d} \right) \end{aligned}$$

- Ce portefeuille synthétisant l'option en  $t = 1$  implique également que

$$V_0 = C_0 = \frac{1}{1 + r} \left( C_1^u \frac{(1 + r) - d}{u - d} + C_1^d \frac{u - (1 + r)}{u - d} \right)$$

- ce résultat fait donc apparaître que la prime de l'option est égale au coût de la couverture
- En adoptant un raisonnement similaire pour le vendeur d'un Put on obtient

$$V_0 = P_0 = \frac{1}{1 + r} \left( P_1^u \frac{(1 + r) - d}{u - d} + P_1^d \frac{u - (1 + r)}{u - d} \right)$$

## EXERCICE

- ▶ Soit la société Umbrella dont l'action cote  $S = 100\$$  en  $t = 0$ 
  - ▶ en  $t = 1$ , s'il pleut, l'action prendra 10% et s'il ne pleut pas elle perdra 10%
  - ▶ l'actif sans risque rémunère  $r = 2\%$  et le strike price est  $K = 100$
- ▶ Calculez  $uS$  et  $dS$

## EXERCICE

- ▶ Soit la société Umbrella dont l'action cote  $S = 100\$$  en  $t = 0$ 
  - ▶ en  $t = 1$ , s'il pleut, l'action prendra 10% et s'il ne pleut pas elle perdra 10%
  - ▶ l'actif sans risque rémunère  $r = 2\%$  et le strike price est  $K = 100$
- ▶ Calculez  $uS$  et  $dS$
- ▶ Calculez  $C_1^u$  et  $C_1^d$

$$uS = 110 \text{ et } dS = 90$$

## EXERCICE

- Soit la société Umbrella dont l'action cote  $S = 100\$$  en  $t = 0$ 
  - en  $t = 1$ , s'il pleut, l'action prendra 10% et s'il ne pleut pas elle perdra 10%
  - l'actif sans risque rémunère  $r = 2\%$  et le strike price est  $K = 100$

- Calculez  $uS$  et  $dS$

$$uS = 110 \text{ et } dS = 90$$

- Calculez  $C_1^u$  et  $C_1^d$

$$C_1^u = 10 \text{ et } C_1^d = 0$$

- Calculez les quantités impliquées dans le portefeuille de couverture

## EXERCICE

- Soit la société Umbrella dont l'action cote  $S = 100\$$  en  $t = 0$ 
  - en  $t = 1$ , s'il pleut, l'action prendra 10% et s'il ne pleut pas elle perdra 10%
  - l'actif sans risque rémunère  $r = 2\%$  et le strike price est  $K = 100$

- Calculez  $uS$  et  $dS$

$$uS = 110 \text{ et } dS = 90$$

- Calculez  $C_1^u$  et  $C_1^d$

$$C_1^u = 10 \text{ et } C_1^d = 0$$

- Calculez les quantités impliquées dans le portefeuille de couverture

$$\alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS} = \frac{10 - 0}{110 - 90} = 50\%$$

$$\beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1 + r} = \frac{10 - 50\% \times 110}{1 + 0.02} = -44.1176$$

- Calculez le coût de la stratégie de couverture et déduisez la prime de l'option

## EXERCICE

- Soit la société Umbrella dont l'action cote  $S = 100\$$  en  $t = 0$ 
  - en  $t = 1$ , s'il pleut, l'action prendra 10% et s'il ne pleut pas elle perdra 10%
  - l'actif sans risque rémunère  $r = 2\%$  et le strike price est  $K = 100$

- Calculez  $uS$  et  $dS$

$$uS = 110 \text{ et } dS = 90$$

- Calculez  $C_1^u$  et  $C_1^d$

$$C_1^u = 10 \text{ et } C_1^d = 0$$

- Calculez les quantités impliquées dans le portefeuille de couverture

$$\alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS} = \frac{10 - 0}{110 - 90} = 50\%$$

$$\beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1 + r} = \frac{10 - 50\% \times 110}{1 + 0.02} = -44.1176$$

- Calculez le coût de la stratégie de couverture et déduisez la prime de l'option

$$V_0 = C_0 = 50\% \times 100 - 44.1176 = 5.8824\$$$

# PROBABILITÉ RISQUE NEUTRE

- Observons  $C_0$  d'un peu plus près :

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \left( C_1^u \frac{(1+r) - d}{u - d} + C_1^d \frac{u - (1+r)}{u - d} \right)$$

- En cas d'état du monde haussier, le payoff du Call  $C_1^u$  est pondéré par

$$\frac{(1+r) - d}{u - d} = q$$

- En cas d'état du monde baissier, le payoff du Call  $C_1^d$  est pondéré par

$$\frac{u - (1+r)}{u - d} = 1 - q$$

- Rappelons que nous avons imposé  $d < 1+r < u$  sous peine d'OA

⇒ il s'en suit que  $q \in (0, 1)$

⇒  $q$  et  $1 - q$  peuvent en fait s'interpréter comme les probabilités d'observer  $u$  ou  $d$

- L'avènement de cette nouvelle mesure de probabilité mène à un concept important

⇒ la (mesure de) probabilité **risque-neutre**

# PROBABILITÉ RISQUE NEUTRE

- Dans un modèle à deux états et une période, le payoff suit une loi discrète d'espérance

$$\mathbb{E}(C_1) = qC_1^u + (1 - q)C_1^d$$

idem pour le Put :  $\mathbb{E}(P_1) = qP_1^u + (1 - q)P_1^d$

- Il vient alors la proposition suivante (idem pour le Put) :

- La valeur d'une option est donnée par l'espérance actualisée au taux sans risque  $r$  de son payoff  $C_1$ , calculée sous la probabilité **risque-neutre**  $q$

$$C_0 = \frac{1}{1 + r} \mathbb{E}_q(C_1)$$

- Concept de probabilité risque-neutre :

- en l'absence d'opportunité d'arbitrage, sous la probabilité risque-neutre  $q$ , **tous les actifs** ont la même espérance de rentabilité, à savoir le taux sans risque  $r$



## PROBABILITÉ RISQUE NEUTRE : EXEMPLE

- Soit une action dont le rendement est  $R = R_u = u - 1$  ou  $R = R_d = d - 1$  selon l'état du monde en  $t = 1$

- L'espérance de l'action est donné par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_q(R) &= q(u - 1) + (1 - q)(d - 1) = qu + (1 - q)d - 1 \\ &= \frac{(1 + r) - d}{u - d}u + \frac{u - (1 + r)}{u - d}d - 1 = \dots = r\end{aligned}$$

- Reprenons l'exemple de la société Umbrella :

- Calculez  $q$  sachant que  $u = 1.1$ ,  $d = 0.9$  et  $r = 0.02$

## PROBABILITÉ RISQUE NEUTRE : EXEMPLE

- Soit une action dont le rendement est  $R = R_u = u - 1$  ou  $R = R_d = d - 1$  selon l'état du monde en  $t = 1$

- L'espérance de l'action est donné par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_q(R) &= q(u - 1) + (1 - q)(d - 1) = qu + (1 - q)d - 1 \\ &= \frac{(1 + r) - d}{u - d}u + \frac{u - (1 + r)}{u - d}d - 1 = \dots = r\end{aligned}$$

- Reprenons l'exemple de la société Umbrella :

- Calculez  $q$  sachant que  $u = 1.1$ ,  $d = 0.9$  et  $r = 0.02$

$$q = \frac{(1 + 0.02) - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6$$

- Calculez  $\mathbb{E}_q(R)$  (donc sous la probabilité risque-neutre)

# PROBABILITÉ RISQUE NEUTRE : EXEMPLE

- Soit une action dont le rendement est  $R = R_u = u - 1$  ou  $R = R_d = d - 1$  selon l'état du monde en  $t = 1$

- L'espérance de l'action est donné par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_q(R) &= q(u - 1) + (1 - q)(d - 1) = qu + (1 - q)d - 1 \\ &= \frac{(1 + r) - d}{u - d}u + \frac{u - (1 + r)}{u - d}d - 1 = \dots = r\end{aligned}$$

- Reprenons l'exemple de la société Umbrella :

- Calculez  $q$  sachant que  $u = 1.1$ ,  $d = 0.9$  et  $r = 0.02$

$$q = \frac{(1 + 0.02) - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6$$

- Calculez  $\mathbb{E}_q(R)$  (donc sous la probabilité risque-neutre)

$$\mathbb{E}_q(R) = qu + (1 - q)d - 1 = 0.02 = r$$

- Si la probabilité qu'il pleuvent en  $t = 1$  est de  $p = 80\%$ , calculez  $\mathbb{E}_p(R)$

# PROBABILITÉ RISQUE NEUTRE : EXEMPLE

- Soit une action dont le rendement est  $R = R_u = u - 1$  ou  $R = R_d = d - 1$  selon l'état du monde en  $t = 1$

- L'espérance de l'action est donné par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_q(R) &= q(u - 1) + (1 - q)(d - 1) = qu + (1 - q)d - 1 \\ &= \frac{(1 + r) - d}{u - d}u + \frac{u - (1 + r)}{u - d}d - 1 = \dots = r\end{aligned}$$

- Reprenons l'exemple de la société Umbrella :

- Calculez  $q$  sachant que  $u = 1.1$ ,  $d = 0.9$  et  $r = 0.02$

$$q = \frac{(1 + 0.02) - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6$$

- Calculez  $\mathbb{E}_q(R)$  (donc sous la probabilité risque-neutre)

$$\mathbb{E}_q(R) = qu + (1 - q)d - 1 = 0.02 = r$$

- Si la probabilité qu'il pleuvent en  $t = 1$  est de  $p = 80\%$ , calculez  $\mathbb{E}_p(R)$

$$\mathbb{E}_p(R) = 0.8u + (1 - 0.8)d - 1 = 0.06$$

⇒ L'écart  $\mathbb{E}_p(R) - \mathbb{E}_q(R) > 0$  se nomme **l'excess return** et correspond à la rémunération du risque : **risk premium**

# PLAN

## 1. La théorie des options

### 1.1 Introduction

### 1.2 Organisation des marchés d'option

### 1.3 Relations de parité et arbitrage

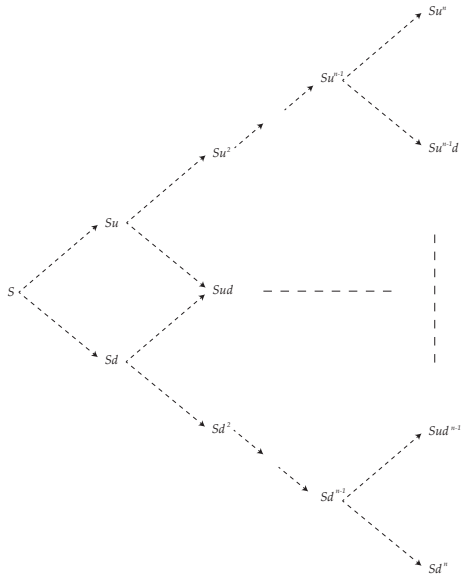
### 1.4 Stratégies de couvertures

### 1.5 Introduction au modèle binomial

### 1.6 Modèle binomial multi-période

## 2. Conclusion

## GÉNÉRALISATION DU BINOMIALE À DEUX PÉRIODES



# GÉNÉRALISATION DU BINOMIALE À DEUX PÉRIODES

## ► Il s'agit d'une arborescence

- obtenue par itération du modèle à deux périodes sur  $n$  périodes
- recombinate :  $\forall$  nœud donné,  $u$  puis  $d$  mène au même nœud que  $d$  puis  $u$

$\Rightarrow$  après  $n$  période, l'actif ne peut prendre que  $n + 1$  valeurs possibles

- possédant  $(N(N + 1))/2$  nœuds
- dont l'identification du chemin parcouru depuis  $t > 2$  vers  $t = 0$  est impossible

## ► Dotons l'arbre d'une **probabilité risque-neutre**

$$q = \frac{(1 + r) - d}{u - d} \text{ et } 1 - q = \frac{u - (1 + r)}{u - d}$$

- cette probabilité risque-neutre s'applique à chaque nœud
- de plus, il y a indépendance avec les événements précédents :  $S_{i+1}$  indépendant de  $S_i$

$\Rightarrow$  les rendements sont donc identiquement et indépendamment distribués (*i.i.d.*)

# PROCESSUS MARTINGALES

- ▶ Dans cet **univers risque-neutre**, les valeurs actualisées de l'actif suivent une **martingale**
- ▶ Les martingales sont des processus dits adaptés
  - ▶ On appelle **processus adapté** à  $S$ , noté  $(M_i)_{i=0,\dots,n}$ , toute famille de variables aléatoires dont la  $i^{ieme}$ , notée  $M_i$ , a une valeur révélée dès la réalisation de la  $i^{ieme}$  valeur  $S_i$  du prix de l'action  $\Rightarrow$  on ne peut pas voir le future

## ▶ Les martingales

- ▶ Un processus  $(M_i)_{i=0,\dots,n}$  adapté à  $S$  est une **martingale** si et seulement si,  $\forall$  date  $i$ , l'espérance de  $M_{i+1}$  conditionnellement à  $S_i$  est égale à  $M_i$  :

$$\mathbb{E}(M_{i+1}|S_i) = M_i, \quad i = 0, \dots, n$$

## ▶ Intuition

- ▶ Pour une date  $i$ , disons aujourd'hui et une date future  $i + 1$ , disons demain
  - ▶ sachant les valeurs actuelles de l'action  $S_i$  et du processus adapté  $M_i$
- $\Rightarrow$  l'espérance de la valeur  $M_{i+1}$  est égale à la valeur d'aujourd'hui



# PROCESSUS MARTINGALES

- ▶ Soit  $S_{t=i}$  un actif risqué suivant une martingale  $\mathbb{E}(S_{i+1}|S_i) = S_i$
- ▶ Démontrons que dans un **univers risque-neutre** où les valeurs de l'actif sont actualisées au taux sans risque,

$$M_i = \frac{S_i}{(1+r)^i}$$

$M_i$  est une **martingale**

- ▶ Sous probabilité risque neutre on a

$$\mathbb{E}_q\left(\frac{S_{i+1}}{(1+r)} \middle| S_i\right) = S_i$$

- ▶ en multipliant tout par  $1/(1+r)^i$  on obtient

$$\mathbb{E}_q\left(\frac{S_{i+1}}{(1+r)^{i+1}} \middle| S_i\right) = \frac{S_i}{(1+r)^i}$$

$\Rightarrow M_i$  répond donc bien à la définition d'une martingale

# LE MODÈLE DE COX-ROSS-RUBINSTEIN

- ▶ Cox-Ross-Rubinstein : méthode d'évaluation des options dans le modèle binomial multi-périodes
- ▶ Analyse en 3 étapes
  - ▶ stratégie de duplication de l'option : basée sur un portefeuille dynamique autofinçant
  - ▶ égalisation de la prime de l'option avec le coût du portefeuille dupliquant
  - ▶ interprétation de la prime comme l'espérance risque-neutre des flux futurs actualisés

# PORTEFEUILLE DYNAMIQUE AUTOFINANÇANT

## ► On nomme **portefeuille dynamique**

- tout processus  $(\alpha_i, \beta_i)_{i=0, \dots, n-1}$  adapté à  $S$  et spécifiant en chaque date  $i$  la composition du portefeuille en termes de d'actifs risqués  $(\alpha_i)$  et sans risque  $(\beta_i)$
- La valeur de l'actif sans risque en  $i$  étant  $(1 + r)^i$ , la valeur du portefeuille en  $i$  est

$$V_i = \alpha_i S_i + \beta_i (1 + r)^i$$

## ► On nomme **portefeuille dynamique autofinançant**

- un portefeuille pour lequel l'investisseur ne procède à aucune mise de fonds et aucun retrait aux dates intermédiaires  $i = 1, \dots, n - 1$
- ⇒ en date  $i$  on passe de la composition  $(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1})$  prévalant entre  $i - 1$  et  $i$  à la composition  $(\alpha_i, \beta_i)$
- ⇒ cela conduit à la condition d'autofinancement suivante :

$$\alpha_{i-1} S_i + \beta_{i-1} (1 + r)^i = \alpha_i S_i + \beta_i (1 + r)^i$$

# PORTEFEUILLE DYNAMIQUE AUTOFINANÇANT

► Principe de la gestion dynamique autofinancée :

- En date initiale, pour  $(\alpha_0, \beta_0)$  on a

$$V_0 = \alpha_0 S_0 + \beta_0$$

- A la fin de cette première période, on a

$$V_1^- = \alpha_0 S_1 + \beta_0(1 + r)$$

- L'investisseur va changer l'allocation du portefeuille en vendant ou achetant de l'actif risqué et/ou sans risque

$$V_1^+ = \alpha_1 S_1 + \beta_1(1 + r)$$

⇒ l'opération sera autofinancée si  $V_1^- = V_1^+$

- En poursuivant cette logique pour toute date  $i$ , on obtient la condition d'autofinancement

$$\alpha_{i-1} S_i + \beta_{i-1} (1 + r)^i = \alpha_i S_i + \beta_i (1 + r)^i$$

# STRATÉGIE RÉCURSIVE DE DUPLICATION BACKWARD

## ► Notations

► Notons  $(i, j)$  un nœud situé en date  $i$  et correspondant à  $j \leq i$  hausses entre 0 et  $i$

⇒ pour  $j = 1, \dots, i$ , les  $(i, j)$  correspondent à une "tranche" de l'arbre en date  $i$

► En chaque nœud  $(i, j)$ , on note  $C_{i,j}$  la valeur de l'option (Call)

► En date  $n$ , la valeur du payoff terminal au nœud  $(n, j)$  est notée  $\Psi_{n,j}$

► En date  $n$ , pour un état du monde  $j$  on a

$$a) S_n = S_0 u^j d^{n-j}$$

$$b) \Psi_{n,j}^C = C_{n,j} = \max(S_0 u^j d^{n-j} - K, 0) \text{ pour un Call}$$

$$c) \Psi_{n,j}^P = P_{n,j} = \max(K - S_0 u^j d^{n-j}, 0) \text{ pour un Put}$$

# STRATÉGIE RÉCURSIVE DE DUPLICATION BACKWARD

## ► Stratégie de couverture

- de 0 et  $n$  on considère les périodes successives :  $(0; 1), (1; 2), \dots, (i; i + 1), \dots, (n - 1; n)$
- on juxtapose à chaque période la stratégie de duplication du modèle à deux périodes
- on fait en sorte que  $V_i^-$ , résultant des états du monde et des stratégies suivies entre 0 et  $i - 1$  constitue l'investissement initiale de la période  $(i, i + 1)$  :

$$V_i^- = V_i^+$$

⇒ a la fin on obtient donc une stratégie autofinancante entre 0 et  $n$

# STRATÉGIE RÉCURSIVE DE DUPLICATION BACKWARD

- On procède récursivement et à rebours (backward) à partir de  $n - 1$

- considérons le nœud  $(n - 1, 0)$ , ce qui donne  $S_n = S_0 d^{n-1}$  car  $j = 0$
- en ce point, il ne reste qu'une période avant le débouclage et nous pouvons appliquer le modèle à deux périodes
- le portefeuille dupliquant est donné par la solution du système

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1,0}S_{n,1} + \beta_{n-1,0}(1+r)^n &= C_{N,1} = \max(S_0 u d^{n-1} - K, 0) \\ \alpha_{n-1,0}S_{n,0} + \beta_{n-1,0}(1+r)^n &= C_{N,0} = \max(S_0 d^n - K, 0)\end{aligned}$$

- en l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur du portefeuille de couverture donne la prime en  $n - 1$

$$C_{n-1,0} = \alpha_{n-1,0}^* S_{n-1,0} + \beta_{n-1,0}^* (1+r)^n$$

- en procédant ainsi pour  $j = 1, \dots, n$  on obtient la valeur de l'option en  $n - 1$  pour tous les nœuds
- On répète ensuite l'opération pour  $i = n - 2, \dots, 0$  afin d'obtenir la prime de l'option en  $C_0$

# MARTINGALE ET PRIX D'OPTION

- ▶ Cette méthode récursive est fastidieuse à mettre en œuvre
    - ▶ Souvent, les compositions intermédiaires n'intéressent pas l'investisseur
    - ▶ La valorisation et le calcul de  $C_0$  est l'objectif
- ⇒ solution : se baser sur le fait que le prix de l'option est une martingale

- ▶ Dans le cadre du modèle à une période nous avons vu que

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_q(C_1) = \mathbb{E}_q\left(\frac{C_1}{1+r}\right)$$

- ▶ Considérons  $(C_i(1+r)^{-i})_{i=0,\dots,n}$  avec  $C_i$  le prix en date  $i$  de l'option de maturité  $n$
- ▶ Dans l'univers risque-neutre

$$\frac{C_i}{(1+r)^i} = \mathbb{E}\left(\frac{C_j}{(1+r)^j} \middle| S_i\right), \quad \forall i, j > i$$

ce qui montre que  $C_i$  est une martingale et donc

$$\frac{C_0}{(1+r)^0} = C_0 = \mathbb{E}\left(\frac{C_n}{(1+r)^n} \middle| S_i\right)$$



## EXPRESSION ANALYTIQUE DES PRIMES

- A l'aide de l'analyse combinatoire et sous la probabilité risque neutre on peut alors montrer que

$$\mathbb{P}_q(S_n = S_0 u^j d^{n-j} | S_0) = C_n^j q^j (1 - q)^{n-j}$$

où le nombre de chemin suivis par  $S$  entre 0 et  $n$  incluant  $j$  hausses parmi les  $n$  mouvements est

$$C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

- Cela nous permet d'obtenir une formule analytique de  $C_0$  pour tout  $n$  et  $j$

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^n C_n^j q^j (1-q)^{n-j} \max(S_0 u^j d^{n-j} - K, 0)$$

- Avec le même raisonnement on obtient la prime du Put  $P_0$

$$P_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^n C_n^j q^j (1-q)^{n-j} \max(K - S_0 u^j d^{n-j}, 0)$$

- Dans la pratique, le modèle CRR nécessite d'être calibré : on utilise souvent des modèles en temps continus comme celui de **Black et Scholes**

## CONCLUSION

# ET MAINTENANT...

- ▶ Bonnes révisions