



# MÉTHODES ET INSTRUMENTS DE LA FINANCE

Master 1 MBFA

Partie 2

Gilles de Truchis  
&  
Elena Dumitrescu

Site : [www.varennnes-ecofin.com/](http://www.varennnes-ecofin.com/)



# PLAN DES CHAPITRES

## 1. Rappels statistiques

### 1.1 Les variables aléatoires

## 2. La finance en avenir incertain

### 2.1 L'utilité espérée

### 2.2 Les fonctions d'utilité

### 2.3 L'utilité de Markowitz

### 2.4 Les limites de l'axiomatique VNM

### 2.5 La théorie du portefeuille

## 3. Conclusion

# RAPPELS STATISTIQUES

# PLAN

## 1. Rappels statistiques

### 1.1 Les variables aléatoires

## 2. La finance en avenir incertain

### 2.1 L'utilité espérée

### 2.2 Les fonctions d'utilité

### 2.3 L'utilité de Markowitz

### 2.4 Les limites de l'axiomatique VNM

### 2.5 La théorie du portefeuille

## 3. Conclusion



# VARIABLES STATISTIQUES

- ▶ La statistique descriptive s'intéresse à l'étude des **populations**
  - ▶ Une **population** est une ensemble d'unités statistiques
- ▶ On travaille souvent sur un **échantillon** de cette population
- ▶ On classe également souvent la population en sous-ensembles
  - ▶ On parle alors de **caractères** ou **variables statistiques**
- ▶ Les valeurs possibles prises par ces variables sont des **modalités**
- ▶ On notera  $x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$  une variable statistique
- ▶ On notera  $c_i = c_1, c_2, \dots, c_n$  les effectifs **associés** à chaque modalité

$$\sum_{i=1}^n c_i = N$$

avec  $N$  la taille de la population

# LES MOYENNES

- Soit une variable statistique  $x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$ 
  - Si  $c_i = 1 \ \forall i$ , on a que  $n = N$

- Moyenne arithmétique de la population :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Moyenne arithmétique pondérée de la population :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

# MESURES DE DISPERSION : LA VARIANCE ET L'ÉCART-TYPE

- La variance : de combien en moyenne on s'écarte de la moyenne

$$\begin{aligned} V(x) = \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 - 2\bar{x} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i x_i + \bar{x}^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

- L'écart type :

$$\sigma = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x})^2 \right)^{1/2}$$

- Si on travaille sur un échantillon et non la population entière, on remplacera  $n^{-1}$  par  $n(n-1)^{-1}$  pour le calcul de  $\sigma^2$  et  $\sigma$

# MOMENTS EMPIRIQUES

- Le **moment empirique** d'ordre  $r$  et d'origine  $\alpha$  est donné par :

$$M_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \alpha)^r$$

- Le **moment empirique ordinaires** d'ordre  $r$  est donné par :

$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i x_i^r$$

- Le **moment empirique centré** d'ordre  $r$  est donné par :

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c_i (x_i - \bar{x})^r$$

# MOMENTS ET DISTRIBUTION

- ▶ Les **moments empiriques** caractérisent l'allure d'une distribution

- ▶ Les moments centrés d'ordre 1 et 2 sont donc

- ▶  $\mu_1 = m_1 - m_1 = 0$
  - ▶  $\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \sigma^2$

- ▶ Le 3ème moment centré est le **skewness** :

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2$$

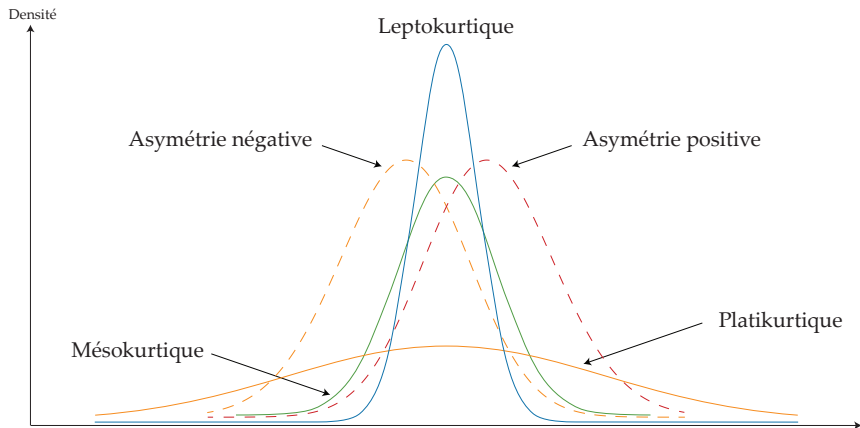
- ▶ Le skewness détermine l'asymétrie de la distribution

- ▶ Le 4ème moment centré est le **kurtosis** :

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

- ▶ Le kurtosis détermine l'aplatissement de la distribution

## MOMENTS ET DISTRIBUTION : ILLUSTRATION



# COVARIANCE ET CORRÉLATION

► Soit deux variables  $x_i = x_1, x_2, \dots, x_r$  et  $y_j = y_1, y_2, \dots, y_s$

► La covariance empirique entre  $x_i$  et  $y_j$ , est donnée par

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{c..} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

avec  $c..$  le nombre d'observations ayant à la fois les modalités  $x_i$  et  $y_j$

► Le coefficient de corrélation de Pearson permet d'évaluer le degré de dépendance linéaire entre deux variables

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

► Il est borné entre  $-1$  (dépendance négative parfaite) et  $+1$  (dépendance positive parfaite)

► Un coefficient de zéro caractérise l'indépendance

# VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

- ▶ Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ 
  - ▶  $\Omega$  représente l'ensemble **dénombrable** des éventualités
  - ▶  $\mathcal{F}$  représente les événements
  - ▶  $\Pr$  représente une loi de probabilité
    - ▶  $\Pr(A)$  donne la probabilité de l'événement  $A$
- ▶ Une variable aléatoire discrète est une fonction application  $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ , avec  $X(\Omega)$  un espace mesurable, telle que

$$\Pr(X = x_i) = \Pr(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\})$$

- ▶ Pour  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $X$  est une variable aléatoire réelle
- ▶ Une série temporelle est une suite de variables aléatoires indexées par le temps :  $\{X_t\}_1^n$ ,  $t \in \mathbb{N}$ 
  - ▶ Pour alléger la notation on notera  $\{X_t\}_1^n$  simplement  $X_t$
- ▶ Si les éléments de  $x_t$  ont tous la même loi de probabilité et sont indépendants on parle de variable **i. i. d.**



# LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

- ▶ Une variable aléatoire discrète est caractérisée par sa loi de probabilité
  - ▶ Il s'agit de l'application  $\Pr(X = x_i)$  définie pour toutes les réalisations  $x_i \in X(\Omega)$  avec

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} \Pr(X = x_i) = 1$$

- ▶ A une loi de probabilité, on peut associer une **fonction de masse** définie comme

$$f_X(x_i) = \Pr(X = x_i), \quad \forall x_i \in X(\Omega)$$

- ▶ A une loi de probabilité, on peut également associer une **fonction de répartition** définie comme

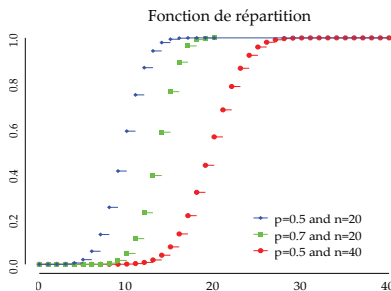
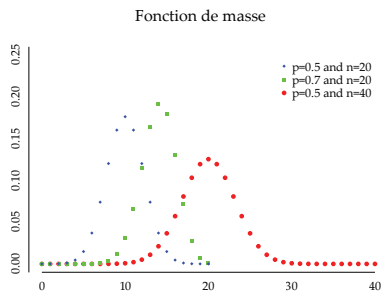
$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{x_i \in X(\Omega), x_i \leq x} \Pr(X = x_i), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

# EXEMPLE DE LA LOI BINOMIALE

- La fonction de masse de la loi binomiale est donnée par

$$\Pr(X = x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}, \quad \forall x_i \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

⇒ probabilité d'obtenir  $p$  "succès" après de  $n$  épreuves de Bernoulli



- Planche de Galton : convergence d'une loi binomiale vers une loi normale

# LES MOMENTS D'UNE VARIABLE DISCRÈTE

- On peut dériver les moments théoriques de loi de probabilité  $X$

- Le **moment ordinaire** d'ordre  $k$  de  $X$  est donné par :

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(x)$$

- Le **moment centré** d'ordre  $k$  de  $x$  est donné par :

$$\mu_k = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^k dF_X(x)$$

- Le moment d'ordre 2 (la variance) sera également noté  $\mathbb{V}(X)$
- Pour les moments centrés de  $X(\Omega) = X_1, X_2, \dots, X_n$  on obtient

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}(X))^k \Pr(X = x_i)$$

# LA GÉNÉRATRICE DE MOMENTS

- Les moments peuvent se calculer à partir d'une loi de distribution grâce à la fonction génératrice des moments

- Pour une fonction de répartition  $F_X(x)$  d'une variable aléatoire  $X$ , on a

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_X(x) = \sum_{i=1}^n e^{tx_i} \Pr(X = x_i)$$

- ... dont le développement en série donne

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \left( 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \dots \right) dF_X(x)$$

- ... ce qui permet d'écrire

$$M_X(t) = 1 + tm_1 + \frac{t^2 m_2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{t^k}{k!}$$

- La dérivée  $k$ -ième par rapport à  $t$  autour de 0 donne le moment d'ordre  $k$

$$m_k = \left. \frac{\partial^k M_X(t)}{\partial t^k} \right|_{t=0}$$

# LA GÉNÉRATRICE DE MOMENTS

- ▶ Exemple : soit une loi géométrique de fonction de masse :  $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ 
  - ▶ On considère une épreuve de Bernouilli qu'on renouvelle jusqu'au premier succès
  - ▶ On nomme  $X$  la variable aléatoire donnant le rang  $k$  du premier succès
- ▶ On admet que la fonction génératrice de moment de cette loi est

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}$$

- ▶ Calculons le moment ordinaire d'ordre 1 :

# LA GÉNÉRATRICE DE MOMENTS

- ▶ Exemple : soit une loi géométrique de fonction de masse :  $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ 
  - ▶ On considère une épreuve de Bernoulli qu'on renouvelle jusqu'au premier succès
  - ▶ On nomme  $X$  la variable aléatoire donnant le rang  $k$  du premier succès

- ▶ On admet que la fonction génératrice de moment de cette loi est

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}$$

- ▶ Calculons le moment ordinaire d'ordre 1 :

$$m_1 = \mathbb{E}(X) = \left. \frac{\partial M_X(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{pe^0}{(1 - (1 - p)e^0)^2} = \frac{1}{p}$$

- ▶ Calculons le moment ordinaire d'ordre 2 (on note  $q = 1 - p$ ) :

# LA GÉNÉRATRICE DE MOMENTS

- ▶ Exemple : soit une loi géométrique de fonction de masse :  $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ 
  - ▶ On considère une épreuve de Bernoulli qu'on renouvelle jusqu'au premier succès
  - ▶ On nomme  $X$  la variable aléatoire donnant le rang  $k$  du premier succès

- ▶ On admet que la fonction génératrice de moment de cette loi est

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}$$

- ▶ Calculons le moment ordinaire d'ordre 1 :

$$m_1 = \mathbb{E}(X) = \left. \frac{\partial M_X(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{pe^0}{(1 - (1 - p)e^0)^2} = \frac{1}{p}$$

- ▶ Calculons le moment ordinaire d'ordre 2 (on note  $q = 1 - p$ ) :

$$m_2 = \mathbb{E}(X^2) = \left. \frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \frac{pe^0(1 + 2q - 2(q + q^2)e^0 + q^2e^0)}{(1 - qe^0)^3} = \frac{2 - p}{p^2}$$

- ▶ On en déduit aisément la variance :  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (1 - p)p^{-2}$

# VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

- ▶ Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ 
  - ▶  $\Omega$  représente l'ensemble **non dénombrable** des éventualités
  - ▶  $\mathcal{F}$  représente les événements
  - ▶  $\Pr$  représente une loi de probabilité
    - ▶  $\Pr(A)$  donne la probabilité de l'événement  $A$
- ▶ Une variable aléatoire continue est une fonction application  $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ , telle que pour tout intervalle  $I \in X(\Omega)$ ,

$$\Pr(X \in I) = \Pr(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in I\})$$



# LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

- ▶ Une variable continue se différencie d'une variable discrète
  - ▶ En effet, la continuité implique que pour une réalisation particulière  $x$

$$\Pr(X = x) = 0, \quad \forall x \in X(\Omega)$$

- ▶ A la loi de probabilité de  $X$  on associe alors une **fonction de densité**
- ▶ Pour une variable réelle, i.e.  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ , la fonction de densité  $f_X(x)$  de la loi de probabilité de  $X$  existe si :
  - ▶  $f_X(x)$  est définie sur le support  $X(\Omega)$
  - ▶  $f_X(x)$  est positive ou nulle
  - ▶  $f_X(x)$  est intégrable
  - ▶  $\forall (a, b) \in X(\Omega), f_X(x)$  est telle que

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

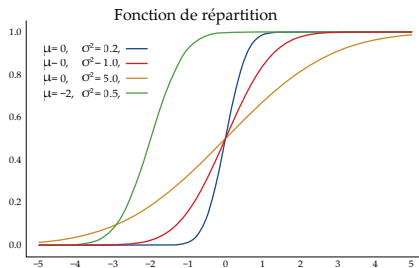
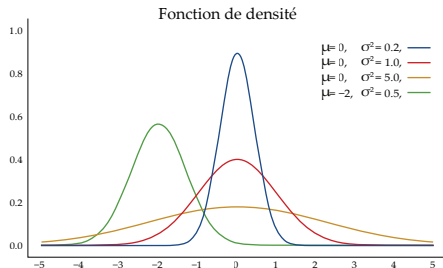
- ▶ La **fonction de répartition** est définie comme

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

## EXEMPLE DE LA LOI NORMALE

- La fonction de densité de la loi normale est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



## LES MOMENTS D'UNE VARIABLE CONTINUE :

► Si  $x_t$  est une variable aléatoire réelle continue

► Les 2 premiers **moments ordinaires** de  $X$  sont

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X f_X(X) dX, \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f_X(X) dX$$

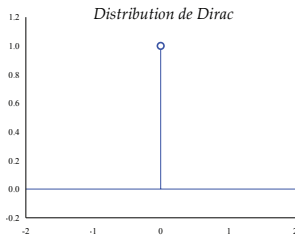
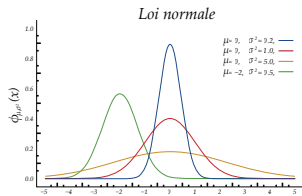
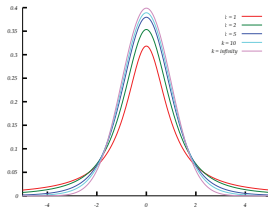
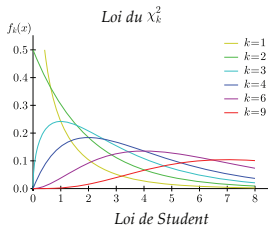
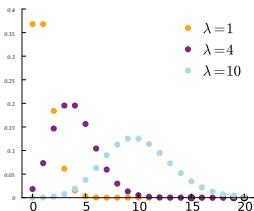
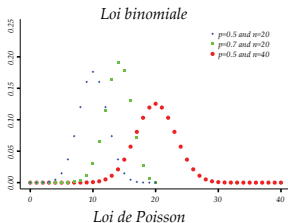
► Les **moments centrés** d'ordre  $r$  de la variable  $x$  sont ainsi donnés

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mathbb{E}(X))^r f_X(X) dX$$

△ Les moments n'existent pas toujours !

## DISTRIBUTIONS

- Il existe un très grand nombre de lois de probabilité
  - Lois discrètes : Loi binomiale, Loi de Poisson, ...
  - Lois continues : Loi du  $\chi^2$ , Loi normale, Loi de Student, ...



# LA FINANCE EN AVENIR INCERTAIN

# PLAN

## 1. Rappels statistiques

### 1.1 Les variables aléatoires

## 2. La finance en avenir incertain

### 2.1 L'utilité espérée

### 2.2 Les fonctions d'utilité

### 2.3 L'utilité de Markowitz

### 2.4 Les limites de l'axiomatique VNM

### 2.5 La théorie du portefeuille

## 3. Conclusion

# INTRODUCTION À LA THÉORIE DU CHOIX

- ▶ Du fait de l'imprévisibilité de la dynamique des actifs, les gains et les pertes sont incertains
- ▶ Un investisseur doit donc faire des choix entre différentes alternatives menant à des gains ou des pertes aléatoires
  - ⇒ Comment déterminer la **décision optimale** pour un investisseur ?
- ▶ Pour simplifier notre vision de ce problème complexe, considérons tout cela comme une loterie
  - ▶ Soit,  $\tilde{W}$  les variables aléatoires liées aux gains ou aux pertes
- ▶ Soit,  $P$  les probabilités associés à ces gains ou pertes

$$\tilde{W} = (w_1, \dots, w_n)'$$

$$P = (p_1, \dots, p_n)'$$

## UN PREMIER CRITÈRE

- Un premier raisonnement (simpliste) consiste à dire que l'attrait pour cette loterie est uniquement déterminé par son espérance de gain

$$\mathbb{E}(\tilde{W}) = \sum_{i=1}^n p_i w_i$$

- Avec un tel critère, un individu rationnel devrait toujours choisir la loterie avec l'espérance de gain la plus élevée
- L'individu devrait même être indifférent entre une somme certaine égale  $\mathbb{E}(\tilde{W})$  et une loterie dont le gain serait  $\tilde{W}$ 
  - ⇒ le **prix pour participer à la loterie** que l'individu est prêt à payer est donc donné par  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = \tilde{W}$
- Ces conclusions, et surtout ce dernier résultat, sont en fait **insatisfaisant**



## CONTRE-EXEMPLE

- Considérons une loterie  $\tilde{X}$  donnant :

$$\tilde{X} = \begin{cases} 0 & \text{avec une proba de } 1/2 \\ 20000 & \text{avec une proba de } 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

- L'espérance de gain de cette loterie est donc :

## CONTRE-EXEMPLE

- Considérons une loterie  $\tilde{X}$  donnant :

$$\tilde{X} = \begin{cases} 0 & \text{avec une proba de } 1/2 \\ 20000 & \text{avec une proba de } 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

- L'espérance de gain de cette loterie est donc :

$$\mathbb{E}(\tilde{X}) = 0.5 \times 0 + 0.5 \times 20000 = 10000$$

- Pourtant, la plupart des individus préféreront une somme certaine de 10000€ à  $\tilde{X}$   
⇒ l'utilité marginale de l'€ supplémentaire décroît
- Pourquoi ? Considérons que l'agent classe par ordre de priorité ces projets
  - Les premiers 10000€ seront affectés au projet le plus utile
  - Les prochains 10000€ seront affectés à un projet un peu moins utile
- ⇒ L'utilité de 20000€ est **inférieur** au double de l'utilité de 10000€

# LE PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG

- ▶ Il s'agit d'un jeu : une pièce tirée  $n$  fois jusqu'à ce qu'elle tombe sur "face"
- ▶ La probabilité que  $n$  tirages aboutisse à l'évènement "face" est alors

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- ▶ La loterie donne  $\tilde{W} = 2^n \text{ €}$ 
  - ⇒ 2€ si "face" après un tirage
  - ⇒ 4€ si "face" après deux tirages
  - ⇒ ...
- ▶ L'espérance de gain est alors :

# LE PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG

- ▶ Il s'agit d'un jeu : une pièce tirée  $n$  fois jusqu'à ce qu'elle tombe sur "face"
- ▶ La probabilité que  $n$  tirages aboutisse à l'évènement "face" est alors

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- ▶ La loterie donne  $\tilde{W} = 2^n \text{ €}$ 
  - ⇒ 2€ si "face" après un tirage
  - ⇒ 4€ si "face" après deux tirages
  - ⇒ ...

- ▶ L'espérance de gain est alors :

$$\mathbb{E}(\tilde{W}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \infty$$

- ▶ **Question** : quel somme seriez-vous prêt à déboursier pour jouer ?

# L'UTILITÉ MARGINALE DÉCROISSANTE

- ⇒ Vous préférez une somme certaine  $W$  à une somme incertaine  $\tilde{W}$  alors même que  $W < \mathbb{E}(\tilde{W}) = \infty$
- ▶ Ce comportement traduit votre **aversion au risque**
  - ▶ Autrement dit, l'utilité marginale de l'euro supplémentaire décroît avec la richesse  
⇒ l'utilité de  $2x$ € est plus faible que 2 fois l'utilité de  $x$ €
  - ▶ **Question :** Comment tenir compte de ce comportement dans l'évaluation de l'attrait d'une loterie ?
- ⇒ **Réponse :** En tenant compte de la fonction d'utilité de l'agent dans le calcul de l'espérance

# L'ESPÉRANCE DE L'UTILITÉ

- Considérons une fonction d'utilité  $U$  et supposons cette fonction
  - croissante : l'utilité croît avec la richesse
  - concave : l'utilité marginale décroît avec la richesse

- Choisissons e.g. la fonction logarithme :  $U(x) = \ln(x)$

- Reprenons le calcul précédent mais cette fois pour  $\mathbb{E}[U(\tilde{W})]$  :

$$\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} U(2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n)$$

- Après quelques calculs on obtient la somme certaine qui égalise  $\tilde{W}$   
⇒ le **prix pour participer à la loterie** que l'individu est prêt à payer est 4

## DÉMONSTRATION

- ▶ On part de  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n) = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- ▶ Or,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  est une suite proche de  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  de limite  $1/(1-x)$
- ▶ Quelle transformation de cette suite nous permet de retrouver  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  ?

## DÉMONSTRATION

- ▶ On part de  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n) = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- ▶ Or,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  est une suite proche de  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  de limite  $1/(1-x)$
- ▶ Quelle transformation de cette suite nous permet de retrouver  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  ?
- ▶ Essayons  $(\partial \text{suite} / \partial x)x$ ; on obtient



# DÉMONSTRATION

- ▶ On part de  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n) = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- ▶ Or,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  est une suite proche de  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  de limite  $1/(1-x)$
- ▶ Quelle transformation de cette suite nous permet de retrouver  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  ?
- ▶ Essayons  $(\partial \text{suite} / \partial x)x$ ; on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \quad \text{et donc une limite de } x/(1-x)^2, \quad |x| < 1$$

car  $\partial \text{limsuite} / \partial x = 1/(1-x)^2$

- ▶ Or, pour  $x = 1/2$  on trouve  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$
- ▶ On a donc  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 2 \ln(2) = \ln(4)$ , i.e.  $4 \in$  car  $\exp(\ln(4)) = 4$

$\Rightarrow$  on verra par la suite pourquoi on utilise la fonction **exp** quand l'utilité est **ln(.)**

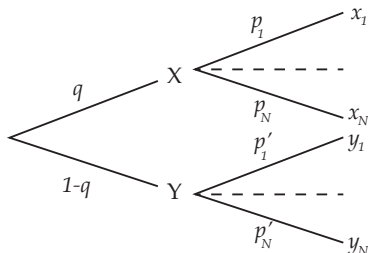
# LE CRITÈRE DE L'UTILITÉ ESPÉRÉE

- ▶ Un individu **rationnel** pourra alors utiliser l'utilité espérée comme critère pour prendre une **décision optimale**
  - ▶ Cette décision sera propre à l'individu car elle dépendra de son utilité
- ⇒ Pour une fonction  $U(x)$ , une décision  $d$  dans le set des décisions  $\mathcal{D}$  menant à un gain aléatoire  $\tilde{W}(d)$  sera donnée par la solution du programme

$$\max_{d \in \mathcal{D}} \mathbb{E}[U(\tilde{W}(d))]$$

# L'AXIOMATIQUE DE VON NEUMAN ET MORGENSTERN

- ▶ Les résultats précédents tiennent s'ils s'inscrivent dans un cadre théorique bien précis de **rationalité** de l'individu
- ▶ Ce cadre est établi par une suite **d'axiomes** proposés par Von Neuman et Morgenstern
- ▶ Définitions :
  - ▶ Soit  $\mathcal{L}$  l'ensemble des loteries
  - ▶ Soit  $X, Y$  et  $Z$  des loteries simples et  $X, Y, Z \in \mathcal{L}$
  - ▶  $X$  et  $Y$  sont composites (non-simples), noté  $(X, Y; q)$ , si :



# L'AXIOMATIQUE DE VON NEUMAN ET MORGENSTERN

## ► Axiome 1 : comparabilité

- L'individu soit préfère  $X$  à  $Y$  :  $X \succ Y$
- soit préfère  $Y$  à  $X$  :  $Y \succ X$
- soit est indifférent entre  $X$  et  $Y$  :  $X \sim Y$

## ► Axiome 2 : transitivité

- Pour un individu **rationnel**,  $X \succcurlyeq Y$  et  $Y \succcurlyeq Z$  implique  $X \succcurlyeq Z$
- avec  $\succcurlyeq$  signifiant la préférence ou l'indifférence

## ► Axiome 3 : indépendance

- Soit 3 loteries,  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  et  $\alpha \in [0, 1]$
- Si  $X \succ Y$  alors  $\alpha X + (1 - \alpha)Z \succ \alpha Y + (1 - \alpha)Z$

## ► Axiome 4 : réflexivité

- $X \succcurlyeq X \quad \forall \quad X \in \mathcal{L}$

# L'AXIOMATIQUE DE VON NEUMAN ET MORGENSTERN

## ► Axiome 5 : continuité

- Pour  $X, Y, Z \in \mathcal{L}$  avec  $X \succ Z$  et  $X \succ Y \succ Z$  alors  $\exists p, q \in [0, 1]$  tels que

$$\alpha X + (1 - \alpha)Z \succ Y \succ \beta Y + (1 - \beta)Z$$

## ► Axiome 6 : réduction des loteries composées

- Un agent doit être indifférent entre une loterie  $X$  qui lui donne 25% de chance de gagner 100 et une loterie  $Y$  qui lui donne 50% de chances de gagner une loterie  $Z$  qui donne 50% de chances de gagner 100.

## ⇒ Si ces axiomes sont vérifiés

- Alors il existe une fonction d'utilité VNM  $U(\cdot)$  tel que  $\forall X, Y$  on a  $X \succ Y$  si et seulement si

$$\mathbb{E}_X(U(\tilde{W})) > \mathbb{E}_Y(U(\tilde{W}))$$

- Si on suppose que l'agent dispose d'un préordre complet sur les conséquences (relation de préférence et d'indifférence sur les conséquences), alors la définition d'une relation de préférence sur les loteries suffit à caractériser le comportement vis-à-vis du risque d'un agent
- Cette relation de préférence doit respecter les axiomes VNM pour que la fonction d'utilité VNM existe

# PLAN

## 1. Rappels statistiques

### 1.1 Les variables aléatoires

## 2. La finance en avenir incertain

### 2.1 L'utilité espérée

### 2.2 Les fonctions d'utilité

### 2.3 L'utilité de Markowitz

### 2.4 Les limites de l'axiomatique VNM

### 2.5 La théorie du portefeuille

## 3. Conclusion

# UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- ▶ Pour un minimum de réalisme, la fonction d'utilité  $U(x)$  doit refléter
  - ▶ l'appétit pour la richesse
  - ▶ mais également l'aversion au risque

- ▶ Pour s'assurer de cela, la fonction doit être dérivable deux fois avec :

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} < 0$$

- ▶ monotonie croissante : l'utilité croît avec la richesse
  - ▶ concavité : l'utilité marginale décroît avec la richesse
- ▶ **Question :** Mais pourquoi la concavité traduit-elle l'aversion au risque ?

## EQUIVALENT CERTAIN ET PRIME DE RISQUE

- ▶ Vous préférez payer 1 € ou jouer à pile ou face ( $\tilde{W}$ ) ?
  - ▶ face vous perdez 8€
  - ▶ pile vous gagnez 10€



# EQUIVALENT CERTAIN ET PRIME DE RISQUE

- ▶ Vous préférez payer 1 € ou jouer à pile ou face ( $\tilde{W}$ ) ?
    - ▶ face vous perdez 8€
    - ▶ pile vous gagnez 10€
  - ▶ Pour certains, perdre 8€ n'est pas effrayant  $\Rightarrow$  jeu
  - ▶ Pour certains, perdre 8€ est effrayant  $\Rightarrow$  -1€
  - ▶ Certains sont indifférents entre -1€ et la loterie
- $\Rightarrow$  Cela implique d'attribuer un "coût" au risque : **prime de risque**
- ▶ **Définition** : prix que l'agent est prêt à payer pour s'affranchir du risque
- $\Rightarrow$  Il existe une somme certaine  $c$  telle que vous êtes indifférent entre  $c$  et jouer pour gagner  $E(\tilde{W})$  : **équivalent certain**

# UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

## Illustration 1

- Soit une loterie qui génère  $\tilde{W}$  avec

$$\tilde{W} = \begin{cases} \omega_1 & \text{avec une proba de } 1/2 \\ \omega_2 & \text{avec une proba de } 1/2 \end{cases}$$

- On a donc  $\mathbb{E}[\tilde{W}] = (\omega_1 + \omega_2)/2$ . En considérant une utilité concave on a

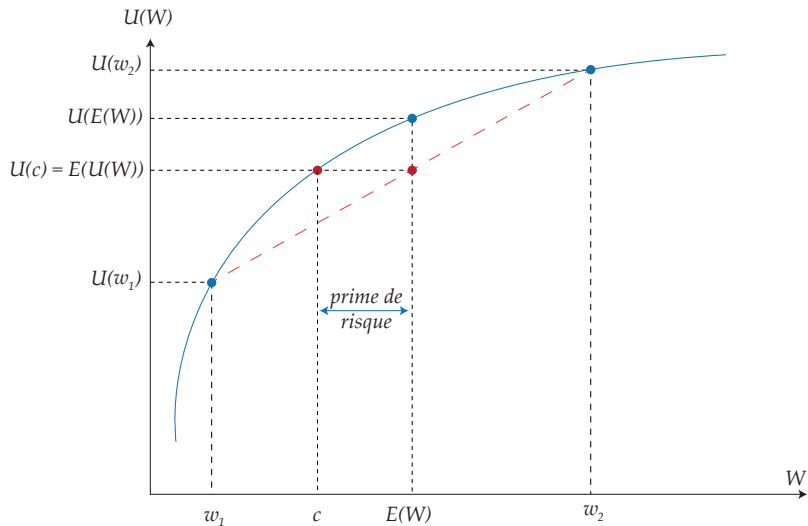
$$\mathbb{E}[U(\tilde{W})] = \frac{U(\omega_1) + U(\omega_2)}{2}$$

- De ce résultat on peut déduire l'**équivalent certain** de  $\tilde{W}$  noté  $c$  :  $\mathbb{E}[U(\tilde{W})] = U(c)$

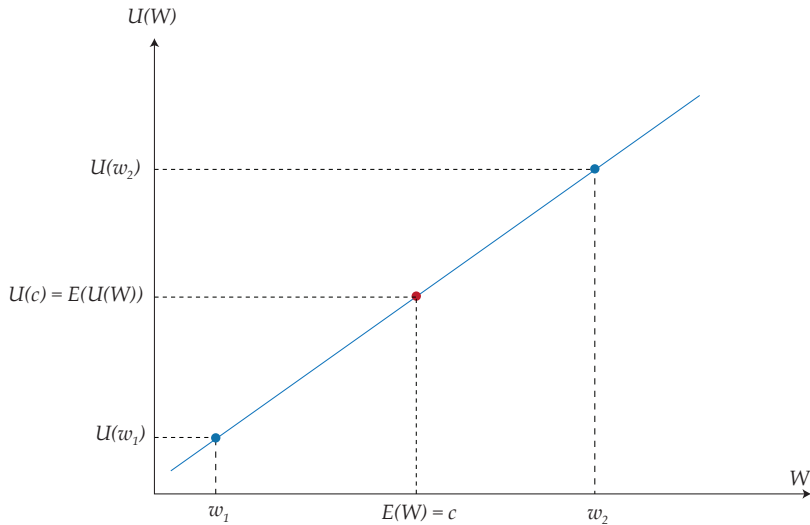
- Du fait de la concavité de  $U$  on a  $c < \mathbb{E}[\tilde{W}] = (\omega_1 + \omega_2)/2$  et donc

$$\mathbb{E}[U(\tilde{W})] = U(c) < U((\omega_1 + \omega_2)/2) = U(\mathbb{E}[\tilde{W}])$$

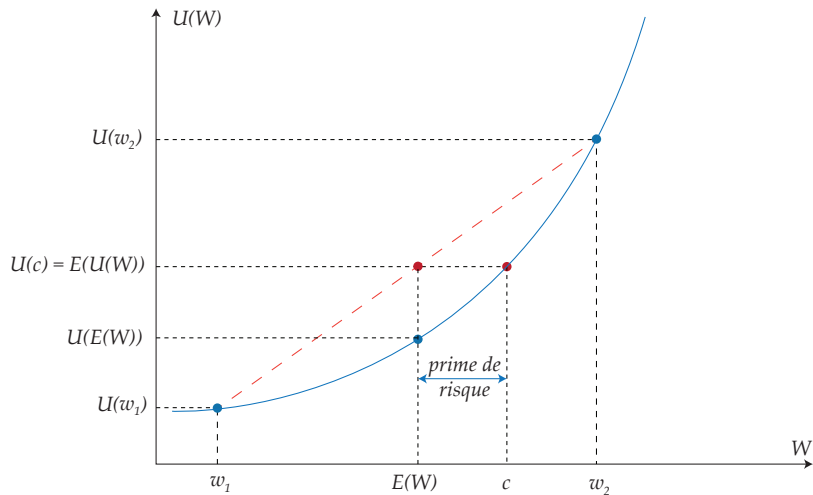
## L'AVERSION AU RISQUE :



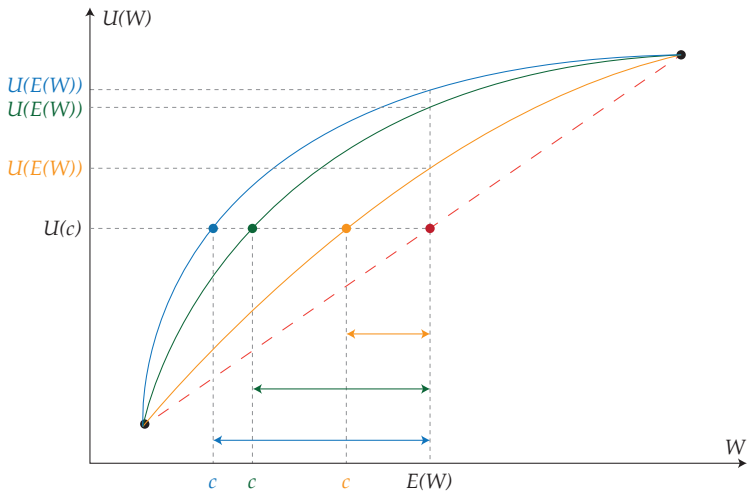
## LA NEUTRALITÉ FACE AU RISQUE :



## LES AMOUREUX DU RISQUE :



## CONCAVITÉ ET AVERSION AU RISQUE



# EQUIVALENT CERTAIN

- ▶ L'équivalent certain est donc le montant certain  $c$  qui procure la même utilité que  $\tilde{W}$
- ▶ On peut calculer  $c$  à condition que  $U(\cdot)$  soit une bijection

- ▶ En effet, on sait que

$$U(c) = \underbrace{\mathbb{E}(U(\tilde{W}))}_{\text{notons ce terme } x}$$

- ▶ On cherche la bijection réciproque  $U^{-1}(\cdot)$  qui donne l'unique antécédent  $c$  de la bijection  $U(\cdot)$  tel que  $U(c) = x$  :

$$c = U^{-1}(x)$$

## EXEMPLES D'APPLICATION INVERSE

- Pour  $f(x) = x^\alpha$  la fonction réciproque est



## EXEMPLES D'APPLICATION INVERSE

- Pour  $f(x) = x^\alpha$  la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$$

- Pour  $f(x) = e^x$  la fonction réciproque est

## EXEMPLES D'APPLICATION INVERSE

- Pour  $f(x) = x^\alpha$  la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$$

- Pour  $f(x) = e^x$  la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

- Pour  $f(x) = a^x$  la fonction réciproque est

## EXEMPLES D'APPLICATION INVERSE

- Pour  $f(x) = x^\alpha$  la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$$

- Pour  $f(x) = e^x$  la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

- Pour  $f(x) = a^x$  la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = \ln_a(x)$$

## EXEMPLE DE PRIME DE RISQUE

- ▶ L'écart entre le gain espéré et l'équivalent certain = la **prime de risque**
- ▶ Soit  $\tilde{W}$  qui donne 25000€ et 15000€ avec des proba équivalentes
  - ▶ L'espérance de gain est

## EXEMPLE DE PRIME DE RISQUE

- L'écart entre le gain espéré et l'équivalent certain = la **prime de risque**

- Soit  $\tilde{W}$  qui donne 25000€ et 15000€ avec des proba équivalentes

- L'espérance de gain est

$$\mathbb{E}[\tilde{W}] = \frac{1}{2}25000 + \frac{1}{2}15000 = 20000$$

- Sous l'hypothèse d'une utilité logarithmique on aura :

## EXEMPLE DE PRIME DE RISQUE

- L'écart entre le gain espéré et l'équivalent certain = la **prime de risque**

- Soit  $\tilde{W}$  qui donne 25000€ et 15000€ avec des proba équivalentes

- L'espérance de gain est

$$\mathbb{E}[\tilde{W}] = \frac{1}{2}25000 + \frac{1}{2}15000 = 20000$$

- Sous l'hypothèse d'une utilité logarithmique on aura :

$$\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \frac{1}{2} \ln(25000) + \frac{1}{2} \ln(15000) = 9.871218$$

- Or, l'équivalent certain est de

## EXEMPLE DE PRIME DE RISQUE

- L'écart entre le gain espéré et l'équivalent certain = la **prime de risque**

- Soit  $\tilde{W}$  qui donne 25000€ et 15000€ avec des proba équivalentes

- L'espérance de gain est

$$\mathbb{E}[\tilde{W}] = \frac{1}{2}25000 + \frac{1}{2}15000 = 20000$$

- Sous l'hypothèse d'une utilité logarithmique on aura :

$$\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \frac{1}{2} \ln(25000) + \frac{1}{2} \ln(15000) = 9.871218$$

- Or, l'équivalent certain est de

$$\ln^{-1}(9.871218) = e^{9.871218} = 19364,92 \Rightarrow \ln(19364,92) = 9.871218$$

- La prime de risque est donc de  $\pi = 20000 - 19364,92 = 635.08 > 0$

⇒ Cette loterie incertaine  $\tilde{W}$  a moins d'attrait qu'une somme certaine égale à  $\mathbb{E}[\tilde{W}]$  puisque  $c < \mathbb{E}[\tilde{W}]$

# UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- Soit un investisseur  $u$  possédant  $W_0 = 10000\text{€}$ 
  - $W_0$  est une richesse initiale certaine
  - Mais  $u$  est confronté à une loterie  $\tilde{\varepsilon}$  qui génère une incertitude sur  $W_0$  :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} -2000 & \text{avec } p = 5/8 \\ 4000 & \text{avec } 1 - p = 3/8 \end{cases} \Rightarrow W_0 + \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} 8000 & \text{avec } p = 5/8 \\ 14000 & \text{avec } 1 - p = 3/8 \end{cases}$$

- En supposant une log-utilité pour  $u$ , l'espérance de  $U(\cdot)$  est :



# UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- Soit un investisseur  $u$  possédant  $W_0 = 10000\text{€}$ 
  - $W_0$  est une richesse initiale certaine
  - Mais  $u$  est confronté à une loterie  $\tilde{\varepsilon}$  qui génère une incertitude sur  $W_0$  :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} -2000 & \text{avec } p = 5/8 \\ 4000 & \text{avec } 1 - p = 3/8 \end{cases} \Rightarrow W_0 + \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} 8000 & \text{avec } p = 5/8 \\ 14000 & \text{avec } 1 - p = 3/8 \end{cases}$$

- En supposant une log-utilité pour  $u$ , l'espérance de  $U(\cdot)$  est :

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8} \ln(8000) + \frac{3}{8} \ln(14000) = 9.197053$$

On a donc  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$

- L'équivalent certain est alors

# UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- Soit un investisseur  $u$  possédant  $W_0 = 10000\text{€}$ 
  - $W_0$  est une richesse initiale certaine
  - Mais  $u$  est confronté à une loterie  $\tilde{\varepsilon}$  qui génère une incertitude sur  $W_0$  :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} -2000 & \text{avec } p = 5/8 \\ 4000 & \text{avec } 1 - p = 3/8 \end{cases} \Rightarrow W_0 + \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} 8000 & \text{avec } p = 5/8 \\ 14000 & \text{avec } 1 - p = 3/8 \end{cases}$$

- En supposant une log-utilité pour  $u$ , l'espérance de  $U(\cdot)$  est :

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8} \ln(8000) + \frac{3}{8} \ln(14000) = 9.197053$$

On a donc  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$

- L'équivalent certain est alors

$$c = e^{9.197053} = 9868.0026$$

- La prime de risque est alors

# UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- Soit un investisseur  $u$  possédant  $W_0 = 10000\text{€}$

- $W_0$  est une richesse initiale certaine
- Mais  $u$  est confronté à une loterie  $\tilde{\varepsilon}$  qui génère une incertitude sur  $W_0$  :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} -2000 & \text{avec } p = 5/8 \\ 4000 & \text{avec } 1 - p = 3/8 \end{cases} \Rightarrow W_0 + \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} 8000 & \text{avec } p = 5/8 \\ 14000 & \text{avec } 1 - p = 3/8 \end{cases}$$

- En supposant une log-utilité pour  $u$ , l'espérance de  $U(\cdot)$  est :

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8} \ln(8000) + \frac{3}{8} \ln(14000) = 9.197053$$

On a donc  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$

- L'équivalent certain est alors

$$c = e^{9.197053} = 9868.0026$$

- La prime de risque est alors

$$\pi = 10250 - 9868.0026 = 381.9974$$

## PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- ▶ L'équivalent certain révèle que l'investisseur  $u$  est averse au risque
  - ▶ Pour se débarrasser du risque, il serait prêt à vendre  $\tilde{\epsilon}$  mais combien ?
  
- ▶ **Définition :** Le prix de vente  $p_\epsilon$  de la partie aléatoire  $\tilde{\epsilon}$  de  $\tilde{W}$  est le prix minimal à partir duquel  $u$  est prêt à vendre  $\tilde{\epsilon}$ 
  - $\Rightarrow u$  cède une richesse incertaine  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\epsilon}$
  - $\Rightarrow$  il récupère une richesse certaine  $W = W_0 + \epsilon$
  
- ▶  $u$  vendra au prix  $\epsilon$  si
  - ▶  $U(W_0 + \epsilon) \geq \mathbb{E}(U(\tilde{W})) = U(c)$
  - ▶ Si  $U(\cdot)$  est monotone croissante,  $W_0 + \epsilon \geq c \iff \epsilon \geq c - W_0$
  - ▶ D'après notre définition de  $p_\epsilon$  cela veut dire que  $p_\epsilon = c - W_0$
  
- ▶ Dans notre exemple, on obtient que

# PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- ▶ L'équivalent certain révèle que l'investisseur  $u$  est averse au risque
  - ▶ Pour se débarrasser du risque, il serait prêt à vendre  $\tilde{\epsilon}$  mais combien ?
  
- ▶ **Définition :** Le prix de vente  $p_{\tilde{\epsilon}}$  de la partie aléatoire  $\tilde{\epsilon}$  de  $\tilde{W}$  est le prix minimal à partir duquel  $u$  est prêt à vendre  $\tilde{\epsilon}$ 
  - $\Rightarrow u$  cède une richesse incertaine  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\epsilon}$
  - $\Rightarrow$  il récupère une richesse certaine  $W = W_0 + \epsilon$
  
- ▶  $u$  vendra au prix  $\epsilon$  si
  - ▶  $U(W_0 + \epsilon) \geq \mathbb{E}(U(\tilde{W})) = U(c)$
  - ▶ Si  $U(\cdot)$  est monotone croissante,  $W_0 + \epsilon \geq c \iff \epsilon \geq c - W_0$
  - ▶ D'après notre définition de  $p_{\tilde{\epsilon}}$  cela veut dire que  $p_{\tilde{\epsilon}} = c - W_0$
  
- ▶ Dans notre exemple, on obtient que

$$p_{\tilde{\epsilon}} = -131.9974$$

$p_{\tilde{\epsilon}} < 0$  montre que  $u$  est prêts à payer pour se débarrasser du risque

## PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- ▶ Étudions la même loterie mais pour des richesses initiales différentes :
  - ⇒ Si  $W_0 = 5000$
  - ⇒ Si  $W_0 = 20000$
- ▶ Dans le cas  $W_0 = 5000$  on obtient

## PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- ▶ Étudions la même loterie mais pour des richesses initiales différentes :

⇒ Si  $W_0 = 5000$

⇒ Si  $W_0 = 20000$

- ▶ Dans le cas  $W_0 = 5000$  on obtient

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8} \ln(3000) + \frac{3}{8} \ln(9000) = 8.418347176$$

et donc un équivalent certain de  $c = e^{8.418347176} = 4529.41$

⇒  $p_\varepsilon = 4529.41 - 5000 = -470.59 < 0$  quand  $\pi = 5250 - 4529.41 = 720.59 > 0$

- ▶ Dans le cas  $W_0 = 20000$  on obtient

## PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- ▶ Étudions la même loterie mais pour des richesses initiales différentes :

$$\Rightarrow \text{Si } W_0 = 5000$$

$$\Rightarrow \text{Si } W_0 = 20000$$

- ▶ Dans le cas  $W_0 = 5000$  on obtient

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8} \ln(3000) + \frac{3}{8} \ln(9000) = 8.418347176$$

et donc un équivalent certain de  $c = e^{8.418347176} = 4529.41$

$$\Rightarrow p_{\varepsilon} = 4529.41 - 5000 = -470.59 < 0 \text{ quand } \pi = 5250 - 4529.41 = 720.59 > 0$$

- ▶ Dans le cas  $W_0 = 20000$  on obtient

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8} \ln(18000) + \frac{3}{8} \ln(24000) = 9.906007814$$

et donc un équivalent certain de  $c = e^{9.906007814} = 20050.47$

$$\Rightarrow p_{\varepsilon} = 20050.47 - 20000 = 50.47 > 0 \text{ quand } \pi = 20250 - 20050.47 = 199.53 > 0$$



## EXERCICE TYPE

- ▶ Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine  $W_0$ 
  - ▶ la proba de perdre son job et de toucher une allocation de  $\alpha$  est de  $1/5$
  - ▶ la proba de garder son job et de toucher un salaire de  $\omega$  est de  $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- ▶ Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ ?

## EXERCICE TYPE

- Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine  $W_0$ 
  - la proba de perdre son job et de toucher une allocation de  $\alpha$  est de  $1/5$
  - la proba de garder son job et de toucher un salaire de  $\omega$  est de  $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ ?
- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?

## EXERCICE TYPE

- Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine  $W_0$ 
  - la proba de perdre son job et de toucher une allocation de  $\alpha$  est de  $1/5$
  - la proba de garder son job et de toucher un salaire de  $\omega$  est de  $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ ?
- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité?
- Quel est l'équivalent certain du travailleur?

## EXERCICE TYPE

- ▶ Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine  $W_0$ 
  - ▶ la proba de perdre son job et de toucher une allocation de  $\alpha$  est de  $1/5$
  - ▶ la proba de garder son job et de toucher un salaire de  $\omega$  est de  $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- ▶ Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ ?
- ▶ En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité?
- ▶ Quel est l'équivalent certain du travailleur?
- ▶ Calculez la prime de risque de l'employé?

## EXERCICE TYPE

- ▶ Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine  $W_0$ 
  - ▶ la proba de perdre son job et de toucher une allocation de  $\alpha$  est de  $1/5$
  - ▶ la proba de garder son job et de toucher un salaire de  $\omega$  est de  $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- ▶ Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ ?
- ▶ En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité?
- ▶ Quel est l'équivalent certain du travailleur?
- ▶ Calculez la prime de risque de l'employé?
- ▶ Refaire l'exercice pour  $\alpha = 1400\text{€}$ ,  $\omega = 2160\text{€}$  et  $W_0 = 6000\text{€}$

## EXERCICE TYPE

- ▶ Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine  $W_0$ 
  - ▶ la proba de perdre son job et de toucher une allocation de  $\alpha$  est de  $1/5$
  - ▶ la proba de garder son job et de toucher un salaire de  $\omega$  est de  $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- ▶ Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ ?
- ▶ En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité?
- ▶ Quel est l'équivalent certain du travailleur?
- ▶ Calculez la prime de risque de l'employé?
- ▶ Refaire l'exercice pour  $\alpha = 1400\text{€}$ ,  $\omega = 2160\text{€}$  et  $W_0 = 6000\text{€}$
- ▶ Refaire l'exercice pour  $\alpha = 1400\text{€}$ ,  $\omega = 2160\text{€}$  et  $W_0 = 0\text{€}$

## EXERCICE TYPE

- ▶ Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$  ?
  - ▶  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = (\alpha + W_0)\frac{1}{5} + (\omega + W_0)\frac{4}{5}$

## EXERCICE TYPE

- ▶ Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ ?
  - ▶  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = (\alpha + W_0)\frac{1}{5} + (\omega + W_0)\frac{4}{5}$
  
- ▶ En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?
  - ▶  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \ln(\alpha + W_0)\frac{1}{5} + \ln(\omega + W_0)\frac{4}{5} = \ln((\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5})$



## EXERCICE TYPE

- ▶ Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ ?
  - ▶  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = (\alpha + W_0)\frac{1}{5} + (\omega + W_0)\frac{4}{5}$
  
- ▶ En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?
  - ▶  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \ln(\alpha + W_0)\frac{1}{5} + \ln(\omega + W_0)\frac{4}{5} = \ln((\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5})$
  
- ▶ Quel est l'équivalent certain du travailleur ?
  - ▶  $c = U^{-1}(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) = \exp(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) = (\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5}$

## EXERCICE TYPE

- ▶ Quel est l'espérance de  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ ?
  - ▶  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = (\alpha + W_0)\frac{1}{5} + (\omega + W_0)\frac{4}{5}$
- ▶ En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?
  - ▶  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \ln(\alpha + W_0)\frac{1}{5} + \ln(\omega + W_0)\frac{4}{5} = \ln((\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5})$
- ▶ Quel est l'équivalent certain du travailleur ?
  - ▶  $c = U^{-1}(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) = \exp(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) = (\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5}$
- ▶ Calculez la prime de risque de l'employé ?
  - ▶  $\pi = \mathbb{E}(\tilde{W}) - \exp(\mathbb{E}(U(\tilde{W})))$

## EXERCICE TYPE

- Refaire l'exercice pour  $\alpha = 1400\text{€}$ ,  $\omega = 2160\text{€}$  et  $W_0 = 6000\text{€}$

## EXERCICE TYPE

► Refaire l'exercice pour  $\alpha = 1400\text{€}$ ,  $\omega = 2160\text{€}$  et  $W_0 = 6000\text{€}$

►  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 8008$ ;  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 8.987447$ ;  $c = 8001.998598$ ;  $\pi = 6.001402$

⇒ Interprétez la prime de risque

## EXERCICE TYPE

- ▶ Refaire l'exercice pour  $\alpha = 1400\text{€}$ ,  $\omega = 2160\text{€}$  et  $W_0 = 6000\text{€}$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 8008$ ;  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 8.987447$ ;  $c = 8001.998598$ ;  $\pi = 6.001402$   
⇒ Interprétez la prime de risque
  
- ▶ Refaire l'exercice pour  $\alpha = 1400\text{€}$ ,  $\omega = 2160\text{€}$  et  $W_0 = 0\text{€}$

## EXERCICE TYPE

- ▶ Refaire l'exercice pour  $\alpha = 1400\text{€}$ ,  $\omega = 2160\text{€}$  et  $W_0 = 6000\text{€}$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 8008$ ;  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 8.987447$ ;  $c = 8001.998598$ ;  $\pi = 6.001402$   
⇒ Interprétez la prime de risque
  
- ▶ Refaire l'exercice pour  $\alpha = 1400\text{€}$ ,  $\omega = 2160\text{€}$  et  $W_0 = 0\text{€}$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 2008$ ;  $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 7.591136$ ;  $c = 1980.562756$ ;  $\pi = 27.437243$   
⇒ Interprétez la prime de risque

# FONDEMENT THÉORIQUE DE LA PRIME DE RISQUE

- ▶ Soit un agent dont l'utilité  $U(.)$  respecte  $U'(. ) > 0$  et  $U''(. ) < 0$
- ▶ L'agent dispose d'une richesse  $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$  avec :
  - ▶  $W_0$  une richesse initiale certaine
  - ▶  $\tilde{\varepsilon}$  i. i. d.  $(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$  une loterie telle que  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = W_0$
- ▶  $\tilde{\varepsilon}$  est donc un aléa qui n'affecte pas  $\mathbb{E}(\tilde{W})$  mais réduit  $\mathbb{E}(U(.))$

⇒ un agent averse au risque aura une prime de risque  $\pi > 0$  dû à  $\tilde{\varepsilon}$

- ▶ Le montant de cette prime de risque découle de l'équation

$$\underbrace{U(W_0 - \pi)}_{\text{l'utilité de la richesse certaine net de la prime}} = \mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon}))$$

l'utilité de la richesse aléatoire hors prime

# FONDEMENT THÉORIQUE DE LA PRIME DE RISQUE

- Un développement de Taylor par rapport à  $\tilde{\varepsilon}$  et  $\pi$  nous donne :



## FONDEMENT THÉORIQUE DE LA PRIME DE RISQUE

- Un développement de Taylor par rapport à  $\tilde{\varepsilon}$  et  $\pi$  nous donne :

$$\begin{aligned} U(W_0) - \pi U'(W_0) + o(\pi) &= \mathbb{E} \left( U(W_0) + \tilde{\varepsilon} U'(W_0) + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^2 U''(W_0) + o(\tilde{\varepsilon}^2) \right) \\ &= U(W_0) + \frac{1}{2} \sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2 U''(W_0) + o(\sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2) \end{aligned}$$

car  $\tilde{\varepsilon}$  i. i. d.  $(0, \sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2)$

- On observe alors que  $\pi$  est donnée par :

## FONDEMENT THÉORIQUE DE LA PRIME DE RISQUE

- Un développement de Taylor par rapport à  $\tilde{\varepsilon}$  et  $\pi$  nous donne :

$$\begin{aligned} U(W_0) - \pi U'(W_0) + o(\pi) &= \mathbb{E}\left(U(W_0) + \tilde{\varepsilon} U'(W_0) + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^2 U''(W_0) + o(\tilde{\varepsilon}^2)\right) \\ &= U(W_0) + \frac{1}{2} \sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2 U''(W_0) + o(\sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2) \end{aligned}$$

car  $\tilde{\varepsilon}$  i. i. d.  $(0, \sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2)$

- On observe alors que  $\pi$  est donnée par :

$$\pi \approx -\frac{1}{2} \frac{U''(W_0)}{U'(W_0)} \sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2$$

- Ce résultat montre que la prime de risque dépend de

- l'intensité du risque  $\sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2$
- l'aversion au risque  $-\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$

# MESURE DE L'AVERSION AU RISQUE

- Cette mesure de **l'aversion au risque** fut proposée par Arrow et Pratt

$$A(W_0) = - \frac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$$

- Ce coefficient est positif car  $U'(W_0) > 0$  et  $U''(W_0) < 0$

- Une mesure relative existe également :

$$R(W_0) = W_0 A(W_0)$$

- On parle de tolérance absolue et relative au risque pour

$$\frac{1}{A(W_0)} \text{ et } \frac{1}{R(W_0)}$$

## LES FONCTIONS TYPES : CARA

► Utilité à **aversion absolue constante (CARA)**

$$U(x) = -\frac{1}{A} \exp(-Ax)$$

⇒ Pour  $A > 0$  on obtient  $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = A$  car

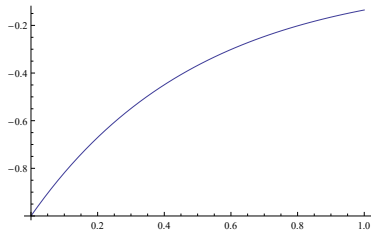
## LES FONCTIONS TYPES : CARA

► Utilité à **aversion absolue constante (CARA)**

$$U(x) = -\frac{1}{A} \exp(-Ax)$$

⇒ Pour  $A > 0$  on obtient  $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = A$  car

$$\frac{-A \exp(-Ax)}{\exp(-Ax)} = -A$$



# LES FONCTIONS TYPES : CRRA

## ► Utilité à **aversion relative constante (CRRA)**

$$U(x) = \frac{1}{1-R} x^{1-R}$$

⇒ Pour  $R \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$  on obtient  $-x \frac{U''(x)}{U'(x)} = R$  car

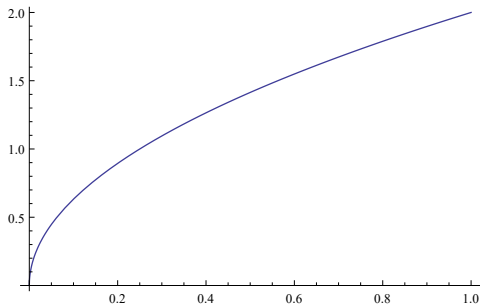
## LES FONCTIONS TYPES : CRRA

► Utilité à **aversion relative constante (CRRA)**

$$U(x) = \frac{1}{1-R} x^{1-R}$$

⇒ Pour  $R \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$  on obtient  $-x \frac{U''(x)}{U'(x)} = R$  car

$$\frac{-R x^{-1-R}}{x^{-R}} = -R \frac{1}{x}$$



## LES FONCTIONS TYPES : CRRA - LN

- Utilité **logarithmique** (cas particulier de fonction CRRA)

$$U(x) = \ln(x)$$

⇒ On obtient  $-x \frac{U''(x)}{U'(x)} = 1$  car



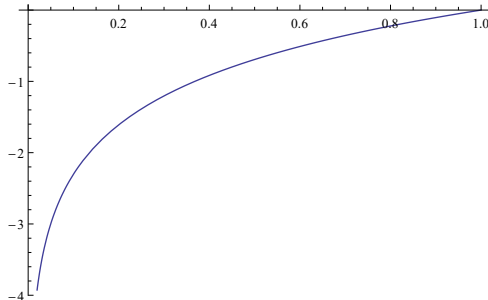
## LES FONCTIONS TYPES : CRRA - LN

- Utilité **logarithmique** (cas particulier de fonction CRRA)

$$U(x) = \ln(x)$$

⇒ On obtient  $-x \frac{U''(x)}{U'(x)} = 1$  car

$$\frac{-x^{-2}}{x^{-1}} = -\frac{1}{x}$$

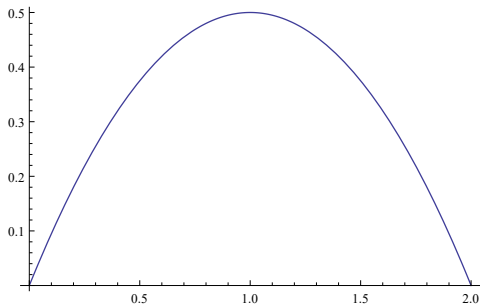


# LES FONCTIONS TYPES : QUADRATIQUE

## ► Utilité **quadratique**

$$U(x) = x - \alpha x^2, \quad \alpha > 0$$

⇒ Attention, cette fonction n'est pas monotone



# LES FONCTIONS TYPES

► Utilité de type **Hyperbolic Absolute Risk Aversion (HARA)**

$$U(x) = \frac{\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{x-\theta}{\gamma} \right)^{1-\gamma}, \quad \frac{x-\theta}{\gamma} > 0$$

⇒ On obtient alors  $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{\gamma}{x-\theta}$  car

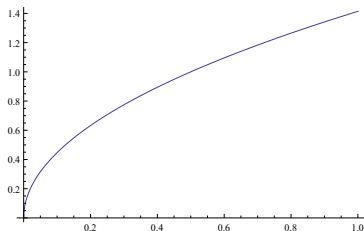
# LES FONCTIONS TYPES

## ► Utilité de type **Hyperbolic Absolute Risk Aversion (HARA)**

$$U(x) = \frac{\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{x-\theta}{\gamma} \right)^{1-\gamma}, \quad \frac{x-\theta}{\gamma} > 0$$

⇒ On obtient alors  $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{\gamma}{x-\theta}$  car

$$-\left(\frac{x-\theta}{\gamma}\right)^{-1-\gamma} / \left(\frac{x-\theta}{\gamma}\right)^{-\gamma} = -\frac{\gamma}{x-\theta}$$



- $\theta = 0$  donne CRRA ||  $\theta = 0$  et  $\gamma = 1$  tend vers la CRRA logarithmique
- $\theta \rightarrow -\infty$  tend vers la CARA ||  $\theta = 0$  et  $\gamma = -1$  donne la quadratique

# PLAN

## 1. Rappels statistiques

### 1.1 Les variables aléatoires

## 2. La finance en avenir incertain

### 2.1 L'utilité espérée

### 2.2 Les fonctions d'utilité

### 2.3 L'utilité de Markowitz

### 2.4 Les limites de l'axiomatique VNM

### 2.5 La théorie du portefeuille

## 3. Conclusion

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- ▶ Soit un individu  $u$  disposant d'une richesse certaine  $W_0$  et risquée  $\tilde{\epsilon}$ 
  - ▶  $u$  désire assurer  $\tilde{\epsilon}$  pour une valeur  $\nu$  contre un éventuel sinistre
  - ▶ le coût de l'assurance est une prime d'un montant  $\beta\nu$  avec  $0 < \beta \leq 1$
  - ▶ le sinistre survient avec une proba de  $p$
  
- ▶ Soit un assureur  $a$  percevant la prime  $\beta\nu$  et payant des coûts fixes  $c$ 
  - ▶ en cas de sinistre,  $a$  doit dédommager  $u$  pour un montant  $\nu$
  - ▶ en cas de sinistre,  $a$  obtient  $\beta\nu - \nu - c$
  - ▶ en absence de sinistre,  $a$  obtient  $\beta\nu - c$

⇒ on suppose  $\beta\nu - c > 0$  pour que  $a$  puisse dégager un profit

## LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- ▶ Formalisez les loteries de l'assuré et de l'assureur
- ▶ Calculer l'espérance de ces loteries
- ▶ Quel est le montant assuré  $\nu$  qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré ?
- ▶ Quel est le montant assuré  $\nu$  qui maximise le critère de l'espérance de l'assureur ?
- ▶ Pourquoi le critère de l'espérance n'est-il pas approprié ?

## LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- ▶ Formalisez les loteries de l'assuré et de l'assureur
  - ▶ concernant l'assuré on trouve :



# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

► Formalisez les loteries de l'assuré et de l'assureur

► concernant l'assuré on trouve :

$$\tilde{W} = \begin{cases} W_0 + (1 - \beta)\nu & \text{avec une proba de } p \\ W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu & \text{avec une proba de } 1 - p \end{cases}$$

► concernant l'assureur on trouve :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

► Formalisez les loteries de l'assuré et de l'assureur

► concernant l'assuré on trouve :

$$\tilde{W} = \begin{cases} W_0 + (1 - \beta)\nu & \text{avec une proba de } p \\ W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu & \text{avec une proba de } 1 - p \end{cases}$$

► concernant l'assureur on trouve :

$$\tilde{\Pi} = \begin{cases} (\beta - 1)\nu - c & \text{avec une proba de } p \\ \beta\nu - c & \text{avec une proba de } 1 - p \end{cases}$$

## LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- ▶ Calculer l'espérance de ces loteries
  - ▶ concernant l'assuré on trouve :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

► Calculer l'espérance de ces loteries

► concernant l'assuré on trouve :

$$\begin{aligned} E(\tilde{W}) &= p(W_0 + (1 - \beta)\nu) + (1 - p)(W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu) \\ &= W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\nu \end{aligned}$$

► concernant l'assureur on trouve :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

► Calculer l'espérance de ces loteries

► concernant l'assuré on trouve :

$$\begin{aligned}E(\tilde{W}) &= p(W_0 + (1 - \beta)\nu) + (1 - p)(W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu) \\&= W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\nu\end{aligned}$$

► concernant l'assureur on trouve :

$$\begin{aligned}E(\tilde{W}) &= p((\beta - 1)\nu - c) + (1 - p)(\beta\nu - c) \\&= (\beta - p)\nu - c\end{aligned}$$

## LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- ▶ Quel est le montant assuré  $\nu$  qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?
  - ▶ concernant l'assuré on a :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- ▶ Quel est le montant assuré  $\nu$  qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?

- ▶ concernant l'assuré on a :

$$\max_{0 \leq \nu \leq \tilde{\varepsilon}} \mathbb{E}[\tilde{W}(\nu)] = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\nu$$

- ▶ comme  $\mathbb{E}[\cdot]$  dépend linéairement de  $\nu$ , l'analyse de  $\partial \mathbb{E}[\cdot] / \partial \nu$  est simple

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Quel est le montant assuré  $\nu$  qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?

- concernant l'assuré on a :

$$\max_{0 \leq \nu \leq \tilde{\epsilon}} \mathbb{E}[\tilde{W}(\nu)] = W_0 + (1-p)\tilde{\epsilon} + (p-\beta)\nu$$

- comme  $\mathbb{E}[\cdot]$  dépend linéairement de  $\nu$ , l'analyse de  $\partial \mathbb{E}[\cdot] / \partial \nu$  est simple

- si  $p < \beta$ ,  $\partial \mathbb{E}[\cdot] / \partial \nu < 0$  et la demande d'assurance est  $\nu = 0$

- si  $p = \beta$ ,  $\partial \mathbb{E}[\cdot] / \partial \nu = 0$  et la demande d'assurance est  $\nu \in [0, \tilde{\epsilon}]$

- si  $p > \beta$ ,  $\partial \mathbb{E}[\cdot] / \partial \nu > 0$  et la demande d'assurance est  $\nu = \tilde{\epsilon}$

⇒ L'individu  $u$  a donc intérêt à s'assurer si  $p > \beta$  pour un montant  $\nu = \tilde{\epsilon}$



## LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- ▶ Quel est le montant assuré  $\nu$  qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?
  - ▶ concernant l'assureur on a :

## LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- ▶ Quel est le montant assuré  $\nu$  qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?

- ▶ concernant l'assureur on a :

$$\max_{0 \leq \nu \leq \tilde{\epsilon}} \mathbb{E}[\tilde{\Pi}(\nu)] = (\beta - p)\nu - c$$

- ▶ comme  $\mathbb{E}[\cdot]$  dépend linéairement de  $\nu$ , l'analyse de  $\partial \mathbb{E}[\cdot] / \partial \nu$  est simple

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Quel est le montant assuré  $\nu$  qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?

- concernant l'assureur on a :

$$\max_{0 \leq \nu \leq \tilde{\epsilon}} \mathbb{E}[\tilde{\Pi}(\nu)] = (\beta - p)\nu - c$$

- comme  $\mathbb{E}[\cdot]$  dépend linéairement de  $\nu$ , l'analyse de  $\partial \mathbb{E}[\cdot] / \partial \nu$  est simple

- si  $p < \beta$ ,  $\mathbb{E}[\cdot] > 0$  si

$$(\beta - p)\nu - c > 0$$

et l'offre d'assurance est  $\nu = \tilde{\epsilon}$

- si  $p = \beta$ ,  $\mathbb{E}[\cdot] < 0$  car  $c > 0$  et l'offre d'assurance est  $\nu = 0$

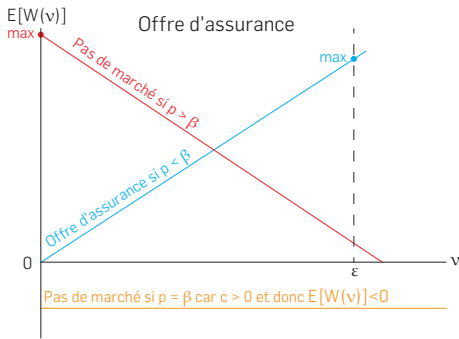
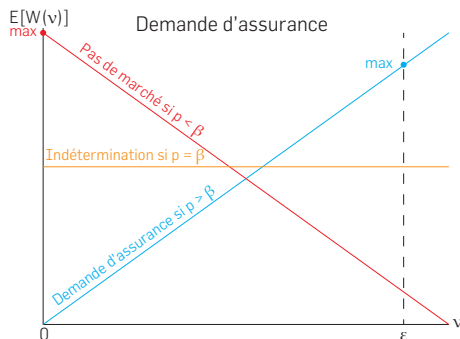
- si  $p > \beta$ ,  $\partial \mathbb{E}[\cdot] / \partial \nu < 0$  et l'offre d'assurance est  $\nu = 0$

⇒ L'assureur  $a$  a donc intérêt à assurer uniquement si  $p < \beta$  pour un montant  $\nu = \tilde{\epsilon}$

⇒ Le critère  $\mathbb{E}[\cdot]$  ne permet donc pas d'établir un marché de l'assurance

- les conditions de l'offreur ne croisent jamais celles du demandeur d'assurance

## LE PARADOXE DE L'ASSURANCE



- Ce résultat confirme que le critère  $\mathbb{E}[\tilde{W}]$  n'est pas un bon critère
- Exercice de réflexion personnel : le critère  $\mathbb{E}[U(\tilde{W})]$  résout-il le paradoxe ?

# LE CRITÈRE ESPÉRANCE-VARIANCE

- ▶ Outre le critère d'utilité espérée, le **critère espérance-variance (MV)** est également très utilisé
- ▶ Le critère MV associe au risque, la variance de  $\tilde{W}$ , notée  $\mathbb{V}(\tilde{W})$ 
  - ⇒ la variance caractérise la dispersion d'une distribution autour de son espérance
- ⇒ Une décision  $d$  dans le set des décisions  $\mathcal{D}$  menant à un gain aléatoire  $\tilde{W}(d)$  sera alors donnée par la solution du programme

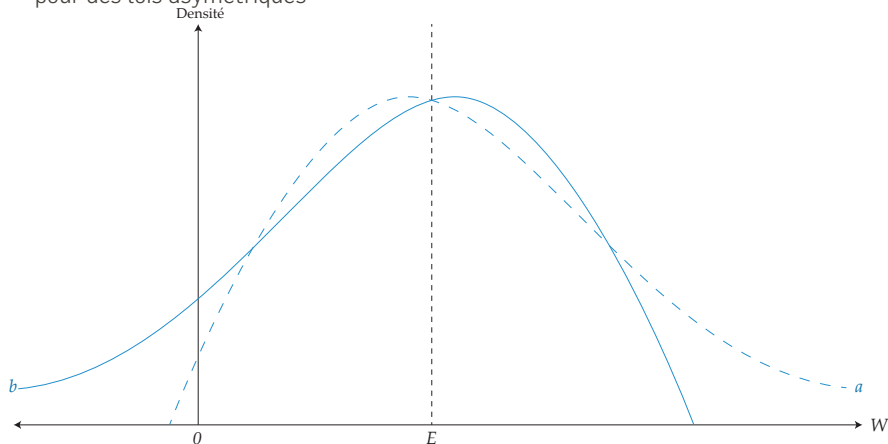
$$\max_{d \in \mathcal{D}} f\left(\mathbb{E}[\tilde{W}(d)], \mathbb{V}[\tilde{W}(d)]\right)$$

- ▶ On supposera

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}(d)]} > 0, \quad \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbb{V}[\tilde{W}(d)]} < 0$$

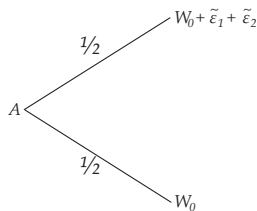
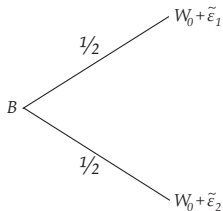
# LES LIMITES DU CRITÈRE ESPÉRANCE-VARIANCE

- Ce critère impose une même sensibilité au risque de gain et de perte
- Il s'applique donc pour des lois de distribution de la richesse symétriques et échoue pour des lois asymétriques



# LES LIMITES DU CRITÈRE ESPÉRANCE-VARIANCE

- Pour pallier à ce problème il faudrait tenir compte de l'asymétrie de la distribution
  - ⇒ i.e. tenir compte de la positivité du **skewness**
    - on associe le **skewness** à la **prudence** de l'investisseur (aversion aux risques baissiers)
- Il est également possible de s'intéresser aux moments d'ordre plus élevés
  - e.g. on associe le **kurtosis** à la **tempérance** de l'investisseur
- ⇒ attitude vis-à-vis de la localisation de changements de risque à moyenne constante
  - pour l'investisseur tempérant,  $B \succ A$  car cela évite une concentration des peines sur un état du monde (préférence pour la désagrégation des risques)



# LES LIMITES DU CRITÈRE ESPÉRANCE-VARIANCE

► Néanmoins, nous ne considérerons ici que des agents qui

► minimise le risque à espérance donnée :

$$\min_{d \in \mathcal{D}} \mathbb{V}[\tilde{W}(d)] \quad s.c. \quad \mathbb{E}[\tilde{W}(d)] = \mathbb{E}[\tilde{W}(d^*)]$$

► maximise le rendement à variance donnée

$$\max_{d \in \mathcal{D}} \mathbb{E}[\tilde{W}(d)] \quad s.c. \quad \mathbb{V}[\tilde{W}(d)] = \mathbb{V}[\tilde{W}(d^*)]$$

avec  $d^*$  la décision solution du programme  $\max f(\cdot)$



# ESPÉRANCE-VARIANCE ET UTILITÉ ESPÉRÉE

- Dans certains cas, le critère de l'UE revient à appliquer le critère EV  
⇒ dépend de la forme de l'utilité et de la distribution de  $\tilde{W}$

- Cas de l'utilité quadratique :  $U(W) = W - \alpha W^2$

- Supposons  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 0$  donnée

⇒  $\min \mathbb{E}(\tilde{W}^2) \equiv \min \mathbb{V}(\tilde{W})$  sous contrainte car

$$\max \left( \mathbb{E}(\tilde{W}) - \alpha \mathbb{E}(\tilde{W}^2) \right) \equiv \max \left( 0 - \alpha \mathbb{E}(\tilde{W}^2) \right)$$

- Cas d'une distribution Normale :  $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- La distribution de  $W$  est déterminée par les deux premiers moments

⇒ Pour toute fonction d'utilité  $U$ , l'UE dépendra de deux paramètres :

$$\mathbb{E}[U(\tilde{W})] = f \left( \mathbb{E}(\tilde{W}), \mathbb{V}(\tilde{W}) \right)$$

# CRITÈRE EV ET UTILITÉ DE MARKOWITZ

► Soit un agent avec des préférences CARA :  $U(\tilde{W}) = -\frac{1}{A} \exp(-A \tilde{W})$

► La richesse incertaine de l'individu est  $\tilde{W} \sim \mathcal{N}(m, \sigma_W^2)$

⇒ rappelons que si  $x \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , alors  $\exp(x) = y \sim \log -\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

⇒ rappelons que  $e^{-Ax} = e^{-A \log(y)}$

⇒ rappelons que  $\mathbb{E}(-A \log(y)) = -A \mathbb{E}(\log(y)) = -Am$

⇒ rappelons que  $\mathbb{V}(-A \log(y)) = A^2 \mathbb{V}(\log(y)) = A^2 \sigma_W^2$

⇒ rappelons que  $\mathbb{E}(y) = e^{m+\sigma^2/2}$

► Calculez l'utilité espérée de la richesse :

## CRITÈRE EV ET UTILITÉ DE MARKOWITZ

► Soit un agent avec des préférences CARA :  $U(\tilde{W}) = -\frac{1}{A} \exp(-A \tilde{W})$

► La richesse incertaine de l'individu est  $\tilde{W} \sim \mathcal{N}(m, \sigma_W^2)$

⇒ rappelons que si  $x \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , alors  $\exp(x) = y \sim \log -\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

⇒ rappelons que  $e^{-Ax} = e^{-A \log(y)}$

⇒ rappelons que  $\mathbb{E}(-A \log(y)) = -A \mathbb{E}(\log(y)) = -Am$

⇒ rappelons que  $\mathbb{V}(-A \log(y)) = A^2 \mathbb{V}(\log(y)) = A^2 \sigma_W^2$

⇒ rappelons que  $\mathbb{E}(y) = e^{m+\sigma^2/2}$

► Calculez l'utilité espérée de la richesse :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U(\tilde{W})) &= \mathbb{E}\left(-\frac{1}{A} \exp(-A \tilde{W})\right) \\ &= -\frac{1}{A} \mathbb{E}(\exp(-A \tilde{W})) \\ &= -\frac{1}{A} e^{-Am + A^2 \sigma_W^2 / 2} = -\frac{1}{A} e^{-A(m - A \sigma_W^2 / 2)}\end{aligned}$$

# CRITÈRE EV ET UTILITÉ DE MARKOWITZ

- Comme il s'agit d'une fonction monotone croissante, toute transformation croissante préservera les préférences
- ⇒ Laissons de côté le terme en dehors de l'espérance et considérons ici la fonction réciproque,  $g^{-1}(\cdot)$  tel que :

# CRITÈRE EV ET UTILITÉ DE MARKOWITZ

- Comme il s'agit d'une fonction monotone croissante, toute transformation croissante préservera les préférences

⇒ Laissons de côté le terme en dehors de l'espérance et considérons ici la fonction réciproque,  $g^{-1}(\cdot)$  tel que :

$$\begin{aligned} g^{-1}(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) &= -A \left( \mathbb{E}(\tilde{W}) - \frac{A}{2} \mathbb{V}(\tilde{W}) \right) \\ &= -A \times f \left( \mathbb{E}(\tilde{W}), \mathbb{V}(\tilde{W}) \right) \end{aligned}$$

⇒ On voit ainsi qu'en présence d'une richesse normalement distribuée, le critère de l'utilité espérée revient à utiliser le critère EV

# L'UTILITÉ DE MARKOWITZ

- Dans la pratique, la forme fonctionnelle du critère EV est la suivante :

$$U_M(\tilde{W}) = f\left(\mathbb{E}[\tilde{W}(d)], \mathbb{V}[\tilde{W}(d)]\right) = \mathbb{E}(\tilde{W}) - k\mathbb{V}(\tilde{W})$$

avec  $k$  un coefficient reflétant l'aversion au risque

⇒ On parle d'utilité de Markowitz

- Pour  $k > 0$ ,  $U_M(\tilde{W})$  reflète l'aversion au risque
- Pour  $k = 0$ ,  $U_M(\tilde{W})$  devient le critère d'espérance (risque-neutre)
- Pour  $k < 0$ ,  $U_M(\tilde{W})$  reflète le goût pour le risque

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

## ► Repartons des loteries

► concernant l'assuré on avait :

$$\tilde{W} = \begin{cases} W_0 + (1 - \beta)\nu & \text{avec une proba de } p \\ W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu & \text{avec une proba de } 1 - p \end{cases}$$

⇒ concernant l'espérance, on avait  $E(\tilde{W}) = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\nu$

⇒ Calculez la variance pour l'assuré (voir rappel de stats)

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

## ► Repartons des loteries

► concernant l'assuré on avait :

$$\tilde{W} = \begin{cases} W_0 + (1 - \beta)\nu & \text{avec une proba de } p \\ W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu & \text{avec une proba de } 1 - p \end{cases}$$

⇒ concernant l'espérance, on avait  $E(\tilde{W}) = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\nu$

⇒ Calculez la variance pour l'assuré (voir rappel de stats)

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\tilde{W}] &= p \left( W_0 + (1 - \beta)\nu - (W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\nu) \right)^2 \\ &\quad + (1 - p) \left( W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu - (W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\nu) \right)^2 \\ &= p(1 - p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2 \end{aligned}$$

car

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}(X))^k \Pr(X = x_i)$$



# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Interprétez  $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2$

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Interprétez  $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2$ 
  - le risque croît avec  $(\tilde{\varepsilon} - \nu)$
  - ⇒ Moins on s'assure, plus le risque est élevé

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- ▶ Interprétez  $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2$ 
  - ▶ le risque croît avec  $(\tilde{\varepsilon} - \nu)$   
⇒ Moins on s'assure, plus le risque est élevé
  - ▶ le risque est également fonction de  $p(1-p)$  qui est quadratique  
⇒  $p(1-p)$  atteint son maximum en  $p = 1/2$  : incertitude maximale
- ▶ Étudiez l'utilité de Markowitz sous l'hypothèse  $p < \beta$   
⇒ Côté assureur, cette hypothèse garantit un profit  $> 0$

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

► Interprétez  $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2$

► le risque croît avec  $(\tilde{\varepsilon} - \nu)$

⇒ Moins on s'assure, plus le risque est élevé

► le risque est également fonction de  $p(1-p)$  qui est quadratique

⇒  $p(1-p)$  atteint son maximum en  $p = 1/2$  : incertitude maximale

► Étudiez l'utilité de Markowitz sous l'hypothèse  $p < \beta$

⇒ Côté assureur, cette hypothèse garantit un profit  $> 0$

$$U_M(\tilde{W}) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu - kp(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2$$

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

► Interprétez  $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2$

► le risque croît avec  $(\tilde{\varepsilon} - \nu)$

⇒ Moins on s'assure, plus le risque est élevé

► le risque est également fonction de  $p(1-p)$  qui est quadratique

⇒  $p(1-p)$  atteint son maximum en  $p = 1/2$  : incertitude maximale

► Étudiez l'utilité de Markowitz sous l'hypothèse  $p < \beta$

⇒ Côté assureur, cette hypothèse garantit un profit  $> 0$

$$U_M(\tilde{W}) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu - kp(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2$$

► lorsque l'assuré aime le risque :  $k < 0$

► lorsque l'assuré est neutre face au risque :  $k = 0$

► lorsque l'assuré est averse au risque :  $k > 0$

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

► Si  $k < 0$ ,  $U_M$  est convexe en  $\nu$

► Si  $\nu = 0$  on obtient :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

► Si  $k < 0$ ,  $U_M$  est convexe en  $\nu$

► Si  $\nu = 0$  on obtient :

$$U_M(\nu = 0) = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} - kp(1 - p)\tilde{\varepsilon}^2$$

► Si  $\nu = \tilde{\varepsilon}$  on obtient :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

► Si  $k < 0$ ,  $U_M$  est convexe en  $\nu$

► Si  $\nu = 0$  on obtient :

$$U_M(\nu = 0) = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} - kp(1 - p)\tilde{\varepsilon}^2$$

► Si  $\nu = \tilde{\varepsilon}$  on obtient :

$$U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\tilde{\varepsilon}$$

⇒ La différence des deux montre que  $U_M(\cdot)$  atteint son max en  $\nu = 0$



# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si  $k < 0$ ,  $U_M$  est convexe en  $\nu$

- Si  $\nu = 0$  on obtient :

$$U_M(\nu = 0) = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} - kp(1 - p)\tilde{\varepsilon}^2$$

- Si  $\nu = \tilde{\varepsilon}$  on obtient :

$$U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\tilde{\varepsilon}$$

⇒ La différence des deux montre que  $U_M(\cdot)$  atteint son max en  $\nu = 0$

$$U_M(\nu = 0) - U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = -kp(1 - p)\tilde{\varepsilon}^2 - (p - \beta)\tilde{\varepsilon} > 0$$

⇒ **Conclusion** : l'individu qui aime le risque ne s'assure pas

- Si  $k = 0$ , le critère est celui de l'espérance étudié précédemment

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

► Si  $k < 0$ ,  $U_M$  est convexe en  $\nu$

► Si  $\nu = 0$  on obtient :

$$U_M(\nu = 0) = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} - kp(1 - p)\tilde{\varepsilon}^2$$

► Si  $\nu = \tilde{\varepsilon}$  on obtient :

$$U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = W_0 + (1 - p)\tilde{\varepsilon} + (p - \beta)\tilde{\varepsilon}$$

⇒ La différence des deux montre que  $U_M(\cdot)$  atteint son max en  $\nu = 0$

$$U_M(\nu = 0) - U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = -kp(1 - p)\tilde{\varepsilon}^2 - (p - \beta)\tilde{\varepsilon} > 0$$

⇒ **Conclusion :** l'individu qui aime le risque ne s'assure pas

► Si  $k = 0$ , le critère est celui de l'espérance étudié précédemment

⇒ **Conclusion :** pas de marché de l'assurance dans ce cas

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- ▶ Si  $k > 0$ , étudions les FOC et les SOC pour trouver la solution
  - ▶ La FOC nous donne :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- ▶ Si  $k > 0$ , étudions les FOC et les SOC pour trouver la solution

- ▶ La FOC nous donne :

$$\frac{\partial U_M}{\partial \nu} = p - \beta + 2kp(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)$$

- ▶ La SOC nous donne :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si  $k > 0$ , étudions les FOC et les SOC pour trouver la solution

- La FOC nous donne :

$$\frac{\partial U_M}{\partial \nu} = p - \beta + 2kp(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)$$

- La SOC nous donne :

$$\frac{\partial^2 U_M}{\partial \nu^2} = -2kp(1-p)$$

⇒  $U_M$  est concave en  $\nu$  (car  $\frac{\partial^2 U_M}{\partial \nu^2} < 0$ ) et admet donc un maximum

- En annulant la FOC on trouve :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si  $k > 0$ , étudions les FOC et les SOC pour trouver la solution

- La FOC nous donne :

$$\frac{\partial U_M}{\partial \nu} = p - \beta + 2kp(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)$$

- La SOC nous donne :

$$\frac{\partial^2 U_M}{\partial \nu^2} = -2kp(1-p)$$

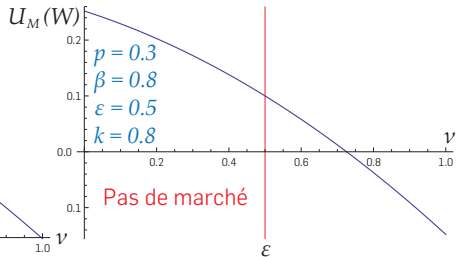
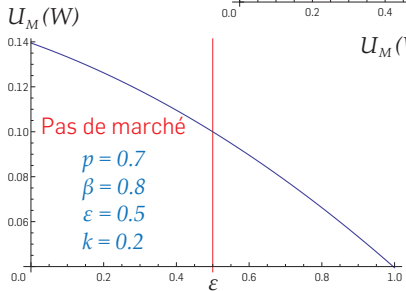
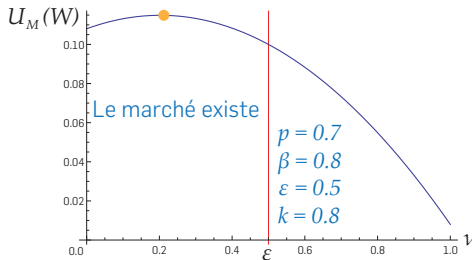
$\Rightarrow U_M$  est concave en  $\nu$  (car  $\frac{\partial^2 U_M}{\partial \nu^2} < 0$ ) et admet donc un maximum

- En annulant la FOC on trouve :

$$\frac{\partial U_M}{\partial \nu} = 0 \Rightarrow \nu^* = \tilde{\varepsilon} - \frac{\beta - p}{2kp(1-p)}$$

$\Rightarrow$  **Conclusion** : avec  $k \gg 0$  et  $0 \ll p < \beta$  on a  $\nu^* \in [0, \tilde{\varepsilon}]$  et il existe bien un marché de l'assurance

## LE PARADOXE DE L'ASSURANCE



# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Discutez la sensibilité de  $\nu^*$  aux paramètres  $k$ ,  $\beta$  et  $p$



# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- ▶ Discutez la sensibilité de  $\nu^*$  aux paramètres  $k$ ,  $\beta$  et  $p$ 
  - ▶ Quand l'aversion au risque augmente,  $\nu^*$  augmente mais  $\nu^* = \tilde{\varepsilon}$  uniquement pour  $k \rightarrow \infty$

## LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- ▶ Discutez la sensibilité de  $\nu^*$  aux paramètres  $k$ ,  $\beta$  et  $p$ 
  - ▶ Quand l'aversion au risque augmente,  $\nu^*$  augmente mais  $\nu^* = \tilde{\varepsilon}$  uniquement pour  $k \rightarrow \infty$
  - ▶ Quand la prime d'assurance augmente,  $\nu^*$  diminue ce qui semble logique : plus s'assurer est coûteux, moins on s'assure

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- ▶ Discutez la sensibilité de  $\nu^*$  aux paramètres  $k$ ,  $\beta$  et  $p$ 
  - ▶ Quand l'aversion au risque augmente,  $\nu^*$  augmente mais  $\nu^* = \tilde{\varepsilon}$  uniquement pour  $k \rightarrow \infty$
  - ▶ Quand la prime d'assurance augmente,  $\nu^*$  diminue ce qui semble logique : plus s'assurer est coûteux, moins on s'assure
  - ▶ L'effet de  $p$  est plus complexe donc étudions la dérivée :

# LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- ▶ Discutez la sensibilité de  $\nu^*$  aux paramètres  $k$ ,  $\beta$  et  $p$ 
  - ▶ Quand l'aversion au risque augmente,  $\nu^*$  augmente mais  $\nu^* = \tilde{\varepsilon}$  uniquement pour  $k \rightarrow \infty$
  - ▶ Quand la prime d'assurance augmente,  $\nu^*$  diminue ce qui semble logique : plus s'assurer est coûteux, moins on s'assure
  - ▶ L'effet de  $p$  est plus complexe donc étudions la dérivée :

$$\frac{\partial \nu^*}{\partial p} = \frac{p^2 - 2\beta p + \beta}{2kp^2(1-p)^2} = \frac{(p-\beta)^2 + \beta(1-\beta)}{2kp^2(1-p)^2} > 0$$

- ⇒ Le résultat est intuitif : plus la probabilité de sinistre est élevée, plus le montant assuré est élevé

# PLAN

## 1. Rappels statistiques

### 1.1 Les variables aléatoires

## 2. La finance en avenir incertain

### 2.1 L'utilité espérée

### 2.2 Les fonctions d'utilité

### 2.3 L'utilité de Markowitz

### 2.4 Les limites de l'axiomatique VNM

### 2.5 La théorie du portefeuille

## 3. Conclusion

# LE PARADOXE D'ALLAIS

- Expérience démontrant que l'axiome d'indépendance est souvent violé
  - Les agents doivent choisir entre deux loteries :  $A$  et  $B$

$$A = \begin{cases} 10000 & \text{avec une proba de } 100\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 0\% \end{cases} \quad \text{et} \quad B = \begin{cases} 15000 & \text{avec une proba de } 90\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 10\% \end{cases}$$

# LE PARADOXE D'ALLAIS

- Expérience démontrant que l'axiome d'indépendance est souvent violé

- Les agents doivent choisir entre deux loteries :  $A$  et  $B$

$$A = \begin{cases} 10000 & \text{avec une proba de } 100\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 0\% \end{cases} \quad \text{et} \quad B = \begin{cases} 15000 & \text{avec une proba de } 90\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 10\% \end{cases}$$

- La plupart des agents optent pour la loterie  $A$ ... puis ils doivent choisir entre

$$C = \begin{cases} 10000 & \text{avec une proba de } 10\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 90\% \end{cases} \quad \text{et} \quad D = \begin{cases} 15000 & \text{avec une proba de } 9\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 91\% \end{cases}$$

# LE PARADOXE D'ALLAIS

- Expérience démontrant que l'axiome d'indépendance est souvent violé

- Les agents doivent choisir entre deux loteries :  $A$  et  $B$

$$A = \begin{cases} 10000 & \text{avec une proba de } 100\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 0\% \end{cases} \quad \text{et} \quad B = \begin{cases} 15000 & \text{avec une proba de } 90\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 10\% \end{cases}$$

- La plupart des agents optent pour la loterie  $A$ ... puis ils doivent choisir entre

$$C = \begin{cases} 10000 & \text{avec une proba de } 10\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 90\% \end{cases} \quad \text{et} \quad D = \begin{cases} 15000 & \text{avec une proba de } 9\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 91\% \end{cases}$$

- Les agents pour qui  $A \succ B$  optent généralement pour  $D$ ... pourtant :

$$C = \begin{cases} A & \text{avec une proba de } 10\% \\ Z & \text{avec une proba de } 90\% \end{cases} \quad \text{et} \quad D = \begin{cases} B & \text{avec une proba de } 10\% \\ Z & \text{avec une proba de } 90\% \end{cases}$$

où  $Z$  est la loterie 0 qui rapporte 0 avec une probabilité de 100%

- Or selon l'axiome d'indépendance, si  $A \succ B$  alors  $C \succ D$  car les procédures d'attribution des lots ne devrait pas compter



# PLAN

## 1. Rappels statistiques

### 1.1 Les variables aléatoires

## 2. La finance en avenir incertain

### 2.1 L'utilité espérée

### 2.2 Les fonctions d'utilité

### 2.3 L'utilité de Markowitz

### 2.4 Les limites de l'axiomatique VNM

### 2.5 La théorie du portefeuille

## 3. Conclusion

# LE PORTEFEUILLE

- ▶ Quittons le marché de l'assurance pour les marchés financiers
- ▶ Supposons un investisseur cherchant à investir dans plusieurs titres
  - ▶ Cela conduit l'agent à composer un portefeuille
- ▶ Pour simplifier on considérera que l'agent
  - ▶ acquiert les titres en  $t = 0$  pour une valeur de portefeuille de  $P_0$
  - ▶ s'intéresse à la valeur terminale du portefeuille  $P_1$  en  $t = 1$
  - ▶  $P_1$  comprend éventuellement des dividendes
- ▶ Dès lors, le taux de rentabilité du portefeuille sera donné par

$$R = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

# LES POSITIONS DE L'INVESTISSEUR

- ▶ Deux positions possibles : position longue (achat) ou courte (vente)
- ▶ Cas d'une position longue
  - ▶ achat de titres en  $t = 0$  et menant à un patrimoine  $P_1$  en  $t = 1$   
⇒ séquence de flux de  $-P_0, +P_1 = R$
- ▶ Cas d'une position courte
  - ▶ vente ou émission de titres en  $t = 0$  et menant à  $-P_1$  en  $t = 1$   
⇒ séquence de flux de  $+P_0, -P_1 = R$
  - ▶ Pourquoi  $-P_1$  ?
    - ▶ **vente à découvert** : vente en  $t = 0$  d'un titre que l'on possède pas et qu'on emprunte pour la période et qui sera rendu en  $t = 1$  après achat
    - ▶ **émission du titre** : le titre est émis au prix  $P_0$  impliquant en  $t = 1$  une valeur de marché pour cette dette de  $P_1$
    - ▶ **vente simple** : vente en  $t = 0$  d'un titre que l'on possède et impliquant une valeur manquante au portefeuille de  $P_1$  en  $t = 1$

# LE PORTEFEUILLE EFFICIENT

- ▶ A l'aide du critère Espérance-Variance, on peut définir un **portefeuille efficient**
- ▶ La notion de portefeuille efficient est introduite par **Markowitz**
  - ▶ Un portefeuille efficient est un portefeuille caractérisé par
    - ▶ une **variance minimum** des rendements à espérance de rentabilité donnée
  - ▶ **Markowitz** considère la variance comme une mesure du risque
    - ▶ nous utiliserons plutôt **l'écart type** car c'est **une mesure cohérente** du risque  
p.s. la variance est en faite une mesure non-cohérente du risque
- ▶ Le cas le plus simple est celui d'un portefeuille contenant deux titres
  - ▶ Titre  $A$  : rentabilité aléatoire  $R_A$  d'espérance  $\mu_A$  et de variance  $\sigma_A^2$
  - ▶ Titre  $B$  : rentabilité aléatoire  $R_B$  d'espérance  $\mu_B$  et de variance  $\sigma_B^2$
  - ▶ La covariance des rentabilités est donnée par  $\sigma_{AB} = \text{cov}(R_A, R_B)$

# LE PORTEFEUILLE À DEUX TITRES

- ▶ La composition du portefeuille nécessite l'investissement d'une somme  $S$  (normalisons à 1€ pour simplifier) dans les titres  $A$  et  $B$

- ▶ La fraction de l'euro investie dans  $A$  est de  $x$  ( $1 - x$  pour  $B$ )

- ▶ Avec  $R_p$  la rentabilité du portefeuille, la valeur de ce dernier est donc

$$1 + R_p = x(1 + R_A) + (1 - x)(1 + R_B) = 1 + xR_A + (1 - x)R_B$$

- ▶ On voit alors immédiatement que  $R_p = xR_A + (1 - x)R_B$

- ▶ On en déduit alors

- ▶  $\mu_p = x\mu_A + (1 - x)\mu_B$

- ▶  $\sigma_p^2 = x^2\sigma_A^2 + (1 - x)^2\sigma_B^2 + 2x(1 - x)\sigma_{AB}$

- ▶ car

$$\mathbb{V}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \sum_j Cov(X_i, X_j) = \sum_k \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$$

## EXEMPLE DE PORTEFEUILLE À DEUX TITRES

- ▶ Soit un portefeuille  $P$  composé a  $2/3$  d'un actif  $A$  et  $1/3$  d'un actif  $B$ 
  - ▶ soit une rentabilité espérée de 12% pour  $A$  et de 18% pour  $B$
  - ▶ soit  $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$  et  $\rho_{AB} = 0.5$  (corrélation de Pearson)
- ▶ Quelle est l'espérance et l'écart type du portefeuille ?

## EXEMPLE DE PORTEFEUILLE À DEUX TITRES

- Soit un portefeuille  $P$  composé a  $2/3$  d'un actif  $A$  et  $1/3$  d'un actif  $B$

- soit une rentabilité espérée de 12% pour  $A$  et de 18% pour  $B$
- soit  $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$  et  $\rho_{AB} = 0.5$  (corrélation de Pearson)

- Quelle est l'espérance et l'écart type du portefeuille ?

- $\mu_P = (2/3 \times 0.12) + (1/3 \times 0.18) = 14\%$
- D'après la formule de  $\rho_{AB}$ , on sait que  $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0.08 \Rightarrow$

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times (0.4)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (0.4)^2 + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 0.08 = 0.12444$$

- On a donc  $\sigma_P = 0.353$
- Qu'observez-vous ?

## EXEMPLE DE PORTEFEUILLE À DEUX TITRES

- Soit un portefeuille  $P$  composé a  $2/3$  d'un actif  $A$  et  $1/3$  d'un actif  $B$

- soit une rentabilité espérée de 12% pour  $A$  et de 18% pour  $B$
- soit  $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$  et  $\rho_{AB} = 0.5$  (corrélation de Pearson)

- Quelle est l'espérance et l'écart type du portefeuille ?

- $\mu_P = (2/3 \times 0.12) + (1/3 \times 0.18) = 14\%$
- D'après la formule de  $\rho_{AB}$ , on sait que  $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0.08 \Rightarrow$

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times (0.4)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (0.4)^2 + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 0.08 = 0.12444$$

- On a donc  $\sigma_P = 0.353$

- Qu'observez-vous ?

- $\sigma_P \leq \min(\sigma_A, \sigma_B)$
- $\Rightarrow$  cette réduction du risque est le fruit de la **diversification**
- $\Rightarrow$  mathématiquement c'est possible car l'écart-type est sous-additif
- $\Rightarrow$  en finance, on parle de **volatilité** plutôt que d'écart-type



## VARIANCE COMME MESURE RISQUE ?

- ▶ Soit deux variables aléatoires  $A$  et  $B$  avec  $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$  et  $\rho_{AB} = 0.5$
- ▶ Quelle est l'écart type de  $P = A + B$  ?

## VARIANCE COMME MESURE RISQUE ?

- ▶ Soit deux variables aléatoires  $A$  et  $B$  avec  $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$  et  $\rho_{AB} = 0.5$
- ▶ Quelle est l'écart type de  $P = A + B$ ?
  - ▶  $\sigma_P = 0.69282 \leq \sigma_A + \sigma_B = 0.8$   
 $\Rightarrow$  la **volatilité** est sous-additive
- ▶ Quelle est la variance de  $P = A + B$ ?

# VARIANCE COMME MESURE RISQUE ?

- ▶ Soit deux variables aléatoires  $A$  et  $B$  avec  $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$  et  $\rho_{AB} = 0.5$
- ▶ Quelle est l'écart type de  $P = A + B$ ?
  - ▶  $\sigma_P = 0.69282 \leq \sigma_A + \sigma_B = 0.8$   
⇒ la **volatilité** est sous-additive
- ▶ Quelle est la variance de  $P = A + B$ ?
  - ▶  $\sigma_P^2 = (0.4)^2 + (0.4)^2 + 2 \times 0.08 = 0.48 \geq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 = 0.32$   
⇒ la variance est super-additive
  - ▶ Une mesure du risque super-additive n'est pas une bonne mesure

## VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

- Pourquoi  $\sigma_P^2$  super-additive et  $\sigma_P$  ne l'est pas ?

# VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

► Pourquoi  $\sigma_P^2$  super-additive et  $\sigma_P$  ne l'est pas ?

► pour la variance :  $\mathbb{V}(A + B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A, B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$

# VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

► Pourquoi  $\sigma_P^2$  super-additive et  $\sigma_P$  ne l'est pas ?

► pour la variance :  $\mathbb{V}(A + B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A, B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$

► pour l'écart type repartons de  $\mathbb{V}(A + B) = \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$

# VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

► Pourquoi  $\sigma_P^2$  super-additive et  $\sigma_P$  ne l'est pas ?

► pour la variance :  $\mathbb{V}(A + B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A, B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$

► pour l'écart type repartons de  $\mathbb{V}(A + B) = \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$

⇒ on voit que  $\mathbb{V}(A + B)$  est maximal pour  $\rho = 1$  et donc

$$\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B$$

# VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

► Pourquoi  $\sigma_P^2$  super-additive et  $\sigma_P$  ne l'est pas ?

► pour la variance :  $\mathbb{V}(A + B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A, B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$

► pour l'écart type repartons de  $\mathbb{V}(A + B) = \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$

⇒ on voit que  $\mathbb{V}(A + B)$  est maximal pour  $\rho = 1$  et donc

$$\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B$$

⇒ par l'identité remarquable  $(a + b)^2$  il vient que

$$\sigma_{A+B}^2 \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B = (\sigma_A + \sigma_B)^2$$



# VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

► Pourquoi  $\sigma_P^2$  super-additive et  $\sigma_P$  ne l'est pas ?

► pour la variance :  $\mathbb{V}(A + B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A, B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$

► pour l'écart type repartons de  $\mathbb{V}(A + B) = \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$

⇒ on voit que  $\mathbb{V}(A + B)$  est maximal pour  $\rho = 1$  et donc

$$\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B$$

⇒ par l'identité remarquable  $(a + b)^2$  il vient que

$$\sigma_{A+B}^2 \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B = (\sigma_A + \sigma_B)^2$$

⇒ grâce à la fonction racine on obtient alors

$$\sqrt{\sigma_{A+B}^2} \leq \sqrt{(\sigma_A + \sigma_B)^2} \iff \sigma_{A+B} \leq \sigma_A + \sigma_B \quad (2)$$

⇒ l'écart-type est bien une mesure sous-additive

► Cette seule propriété ne suffit pas à définir une bonne mesure du risque

► il existe une axiomatique du risque qui dépasse les limites du cours

# PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Dans l'exercice précédent,  $x$  était fixé ( $x = 2/3$ )

⇒ Le portefeuille  $P(x = 2/3)$  en résultant donnait :  $\mu_P = 14\%$  pour un risque  $\sigma_P = 0.353$

- La question qui compte pour notre investisseur est alors la suivante :

⇒ Existe-t-il un portefeuille  $P(x = x^*)$  avec  $x^*$  tel que

- $\mu_P^* > \mu_P$
- $\sigma_P^* < \sigma_P$

- Plus généralement, la question du portefeuille efficient est la suivante

⇒ Existe-t-il un portefeuille optimal au sens de l'utilité de Markowitz

$$\max_{x \in \mathcal{X}} f(\mathbb{E}[P(x)], \mathbb{V}[P(x)]), \quad \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbb{E}[P(x)]} > 0, \quad \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbb{V}[P(x)]} < 0$$

# REPRÉSENTATION DES PORTEFEUILLES

- Il est possible de représenter le problème du portefeuille efficient graphiquement

- On sait que l'agent cherche à

- minimiser le risque à espérance donnée :

$$\min_{d \in \mathcal{D}} \mathbb{V}[\tilde{W}(d)] \quad s.c. \quad \mathbb{E}[\tilde{W}(d)] = \mathbb{E}[\tilde{W}(d^*)]$$

- maximiser le rendement à variance donnée

$$\max_{d \in \mathcal{D}} \mathbb{E}[\tilde{W}(d)] \quad s.c. \quad \mathbb{V}[\tilde{W}(d)] = \mathbb{V}[\tilde{W}(d^*)]$$

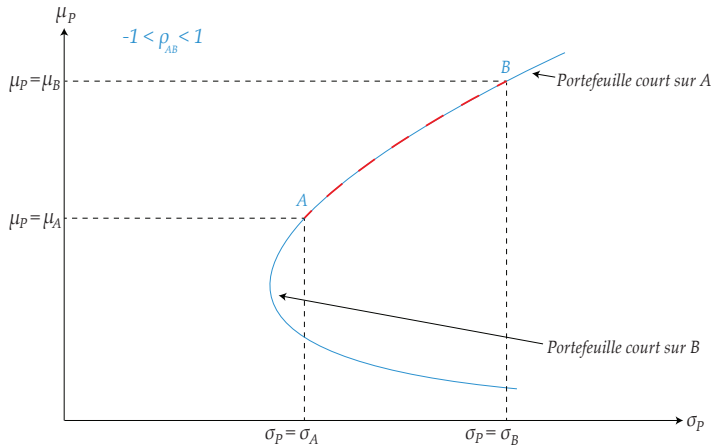
avec  $d^*$  la décision solution du programme  $\max f(\cdot)$

- Faisons varier  $x$  dans les équations

$$\mu_p = x\mu_A + (1-x)\mu_B, \quad \sigma_p^2 = x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\sigma_{AB}$$

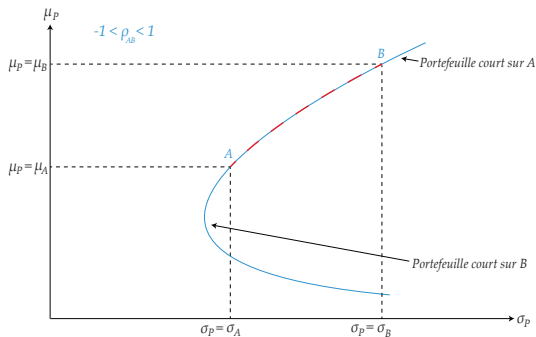
⇒ On obtient alors en ensemble de portefeuilles représentant les combinaisons possible d'actifs  $A$  et  $B$

# REPRÉSENTATION DES PORTEFEUILLES À DEUX TITRES



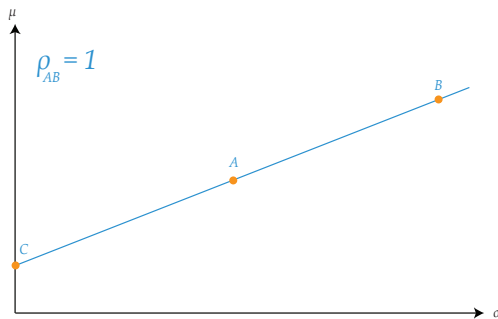
- A rentabilité (variance) donnée, tous les portefeuilles minimisant (maximisant) la variance (rentabilité) sont dits efficaces

# REPRÉSENTATION DES PORTEFEUILLES À DEUX TITRES



- Point  $A$  : portefeuille composé uniquement de l'actif  $A$
- Point  $B$  : portefeuille composé uniquement de l'actif  $B$
- A gauche de  $A$  :  $1 - x < 0 \Rightarrow$  ventes à découvert de  $B$
- A droite de  $B$  :  $x < 0 \Rightarrow$  ventes à découvert de  $A$
- Si ventes à découvert interdites : segment AB uniquement

# PORTEFEUILLES À DEUX TITRES PARFAITEMENT CORRÉLÉS

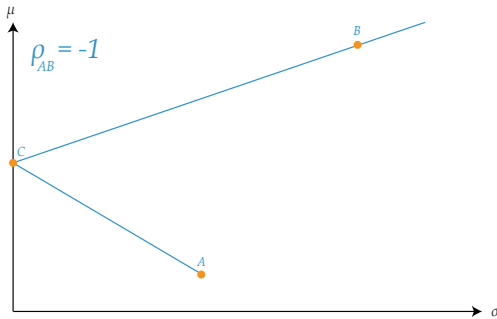


- Si  $\rho_{AB} = 1$  la relation entre  $\mu_p$  et  $\sigma_p$  est linéaire car (voir (2))

$$\mu_p = x\mu_A + (1 - x)\mu_B, \quad \sigma_p = x\sigma_A + (1 - x)\sigma_B$$

- Cette corrélation parfaite donne naissance au point  $C$  si  $x \rightarrow -\sigma_B/(\sigma_A - \sigma_B)$   
 $\Rightarrow$  revient à prendre une position courte sur  $B$  ( $1 - x < 0$ , si  $\sigma_A > \sigma_B$ ) tel que le risque est entièrement éliminé de  $P$  : au point  $C$ ,  $\sigma_P = 0$

# DEUX TITRES PARFAITEMENT NÉGATIVEMENT CORRÉLÉS



- Si  $\rho_{AB} = -1$ ,  $\mu_p = x\mu_A + (1 - x)\mu_B$  et  $x = \sigma_B / (\sigma_A + \sigma_B)$  car

$$\sigma_p^2 = x^2 \sigma_A^2 + (1 - x)^2 \sigma_B^2 - 2x(1 - x)\sigma_A \sigma_B = (x\sigma_A - (1 - x)\sigma_B)^2$$

- Cette corrélation négative parfaite donne naissance au point C

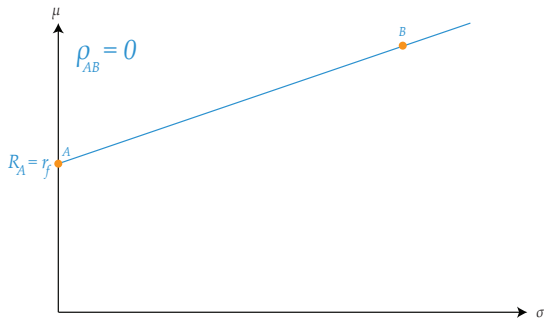
⇒ revient à prendre une position longue sur A et B pour obtenir une diversification parfaite puisque le risque est entièrement éliminé

# L'ACTIF SANS RISQUE

- ▶ Les meilleurs signatures ne sont pas exemptes à 100% de risque
- ▶ Cependant, la probabilité de faillite de certains états est relativement négligeable  
⇒ détenir des bons du trésors de ces états revient à détenir un **actif sans risque**
- ▶ L'actif sans risque produit une rentabilité certaine au **taux sans risque** noté  $r_f$
- ▶ Le taux sans risque va représenter la base de la **rentabilité exigée** de tout titre financier
- ▶ La rentabilité exigée correspond en effet à  $r_f$  plus une prime de risque proportionnel au **risque systématique**
- ▶ Le risque systématique est le risque non diversifiable car corrélé au marché lui même



## PORTEFEUILLES AVEC UN ACTIF SANS RISQUE

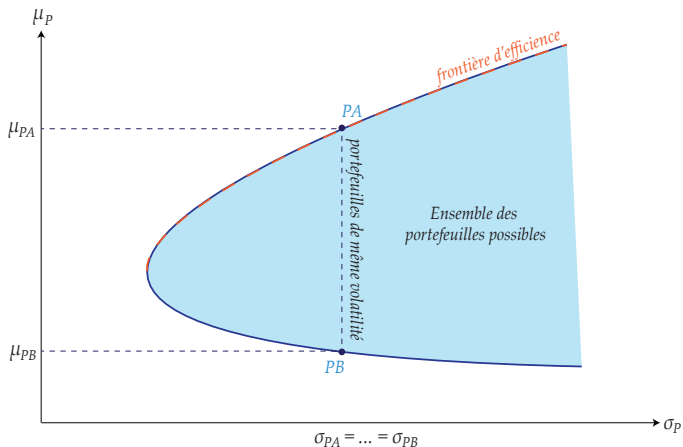


- Si l'actif  $A$  est sans risque,  $\sigma_A = 0$  et donc  $\rho_{AB} = 0$  et

$$\sigma_p^2 = (1 - x)^2 \sigma_B^2$$

# LE PORTEFEUILLE À N TITRES SANS ACTIF SANS RISQUE

## ► La généralisation à $N$ titres



# PRINCIPE DE DIVERSIFICATION

- ▶ Soit  $P$  un portefeuille composé de  $N$  actifs alloués selon les poids  $x_1, x_2, \dots, x_N$  normalisés à 1
  - ▶ La rentabilité du portefeuille est donc  $R_P = \sum_{i=1}^N x_i R_i$
  - ▶ Comme pour le portefeuille à 2 titres, le risque de  $P$  va dépendre
    - ▶ de la variance de l'actif  $i$  :  $\sigma_i$
    - ▶ de la covariance avec le reste du portefeuille  $P$  :  $cov(R_i, R_p)$
- ⇒ L'impacte de  $i$  sur  $P$  sera très différent selon le signe de  $cov(R_i, R_p)$
- ▶ si  $cov(R_i, R_p) < 0$ , les baisses (hausses) de  $P$  seront compensées par les hausses (baisses) de  $i$
  - ▶ si  $cov(R_i, R_p) > 0$ , les baisses (hausses) de  $P$  seront accentuées par les baisses (hausses) de  $i$

# PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Existe-t-il un portefeuille optimal au sens de l'utilité de Markowitz

$$\max_{x \in \mathcal{X}} f(\mathbb{E}[P(x)], \mathbb{V}[P(x)]), \quad \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbb{E}[P(x)]} > 0, \quad \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbb{V}[P(x)]} < 0$$

⇒ Après l'analyse graphique passons à une analyse analytique

- repartons de  $P$  composé de 2 actifs :  $A$  et  $B$  en proportion  $x$  et  $1 - x$
- le rendement de  $P$  est donné :  $R_p = xR_A + (1 - x)R_B$

$$\Rightarrow \mu_p = \mathbb{E}(R_p) = x\mu_A + (1 - x)\mu_B$$

$$\Rightarrow \sigma_p^2 = \mathbb{E}(R_p^2) - \mathbb{E}(R_p)^2 = x^2\sigma_A^2 + (1 - x)^2\sigma_B^2 + 2x(1 - x)\sigma_{AB}$$

- Pour quel  $x$  la variance de  $P$  est-elle minimale ?

# PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Solution :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 0$$

- La dérivée nous donne

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 2x\sigma_A^2 + 2x\sigma_B^2 - 2\sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB} - 4x\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}$$

- En annulant la dérivée on obtient alors :

$$x = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}$$

## EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- ▶ Soit une action  $A$  proposant de manière équiprobable  $R_A = \{0\%, 5\%, 15\%, 40\%\}$
- ▶ Soit une action  $B$  proposant de manière équiprobable  $R_B = \{30\%, 40\%, 0\%, -10\%\}$
- ▶ Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de chaque action

## EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- ▶ Soit une action  $A$  proposant de manière équiprobable  $R_A = \{0\%, 5\%, 15\%, 40\%\}$
- ▶ Soit une action  $B$  proposant de manière équiprobable  $R_B = \{30\%, 40\%, 0\%, -10\%\}$
- ▶ Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de chaque action
  - ▶  $\mu_A = \mathbb{E}(R_A) = \frac{1}{4}0\% + \frac{1}{4}5\% + \frac{1}{4}15\% + \frac{1}{4}40\% = 15\%$
  - ▶  $\mu_B = \mathbb{E}(R_B) = \frac{1}{4}30\% + \frac{1}{4}40\% + \frac{1}{4}0\% - \frac{1}{4}10\% = 15\%$
  - ▶  $\sigma_A^2 = \mathbb{V}(R_A) = \left( \frac{1}{4}0\%^2 + \frac{1}{4}5\%^2 + \frac{1}{4}15\%^2 + \frac{1}{4}40\%^2 \right) - 15\%^2 = 0.02375\%$
  - ▶  $\sigma_B^2 = \mathbb{V}(R_B) = \left( \frac{1}{4}30\%^2 + \frac{1}{4}40\%^2 + \frac{1}{4}0\%^2 - \frac{1}{4}10\%^2 \right) - 15\%^2 = 0.0425\%$
  - ▶  $\sigma_A = 0.1541$
  - ▶  $\sigma_B = 0.2062$

## EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la covariance et la corrélation entre  $R_A$  et  $R_B$
- Rappel :

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} x_i y_j \Pr(X = x_i || Y = y_j) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$



## EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

► Calculez la covariance et la corrélation entre  $R_A$  et  $R_B$

► Rappel :

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} x_i y_j \Pr(X = x_i | Y = y_j) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$\text{► } \sigma_{AB} = \frac{1}{4} \left( 0\% \times 30\% + 5\% \times 40\% + 15\% \times 0\% - 40\% \times 10\% \right) - 15\%^2 = -0.0275$$

$$\text{► } \rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-0.0275}{0.1541 \times 0.2062} = -0.8656$$

► Soit un portefeuille  $P$  équipondéré ( $x = 0.5$ ) composé de  $A$  et  $B$

⇒ Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de  $P$

## EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

► Calculez la covariance et la corrélation entre  $R_A$  et  $R_B$

► Rappel :

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} x_i y_j \Pr(X = x_i | Y = y_j) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

►  $\sigma_{AB} = \frac{1}{4} \left( 0\% \times 30\% + 5\% \times 40\% + 15\% \times 0\% - 40\% \times 10\% \right) - 15\%^2 = -0.0275$

►  $\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-0.0275}{0.1541 \times 0.2062} = -0.8656$

► Soit un portefeuille  $P$  équipondéré ( $x = 0.5$ ) composé de  $A$  et  $B$

⇒ Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de  $P$

►  $\mu_P = \frac{1}{2}\mu_A + \frac{1}{2}\mu_B$

►  $\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_B^2 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sigma_{AB} = 0.0028125$

►  $\sigma_P = 0.053 < \sigma_A < \sigma_B$

## EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la composition de portefeuille qui minimise la variance
- Rappel :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$$

## EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la composition de portefeuille qui minimise la variance
- Rappel :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$$

- On obtient

$$x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}} = 0.57732$$

- Refaire l'exercice avec  $x^*$

## EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la composition de portefeuille qui minimise la variance
- Rappel :

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial x} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$$

- On obtient

$$x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}} = 0.57732$$

- Refaire l'exercice avec  $x^*$

- On obtient

$$\sigma_P^{(x^*)} = 0.0456906 < \sigma_P^{(x=0.5)} < \sigma_A < \sigma_B$$

# LE MODÈLE DE MARCHÉ (SHARPE)

- ▶ Soit  $N$  actifs de rentabilité  $R_1, R_2, \dots, R_N$
- ▶ Supposons que  $R_i$  est le résultat
  - ▶ d'une incertitude imputable à la conjoncture économique et donc **commune** à tous les actifs  $i$   
⇒ on notera  $R_m$  cette composante de rentabilité commune
  - ▶ d'une incertitude propre à chaque actif  $i$  et donc **idiosyncratique**  
⇒ on notera  $\varepsilon_i$  cette composante de rentabilité idiosyncratique

# LE MODÈLE DE MARCHÉ (SHARPE)

⇒ Pour tout titre  $i$ , on peut alors décrire sa rentabilité ainsi :

$$R_i = \mu_i + \beta_i(R_m - \mu_m) + \varepsilon_i \Leftrightarrow R_i - \mu_i = \beta_i(R_m - \mu_m) + \varepsilon_i$$

- ▶ On suppose  $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma_\varepsilon^2)$  et comme la rentabilité de marché est centrée
  - ▶  $\mu_i$  correspond à l'espérance de rentabilité de l'actif  $i$
- ▶  $\beta_i$  représente la sensibilité de  $R_i$  aux variations de  $R_m$ 
  - ▶ on parle de **bêta** du titre  $i$
  - ▶  $\beta_i R_m$  correspond au **risque systématique** (non diversifiable)
- ▶  $\varepsilon_i$  correspond au **risque idiosyncratique** (diversifiable) de l'actif

# LE MODÈLE DE MARCHÉ (SHARPE)

- Pour le portefeuille  $P$  on obtient donc

$$R_P = (x_1\mu_1, \dots, x_N\mu_N) + (x_1\beta_1, \dots, x_N\beta_N)(R_m - \mu_m) + (x_1\varepsilon_1, \dots, x_N\varepsilon_N)$$

- On a donc  $R_P = \mu_P + \beta_P(R_m - \mu_m) + \varepsilon_P$

- L'hypothèse  $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d. } (0, \sigma_\varepsilon^2)$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_P R_m) = 0$  permet d'obtenir

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

- $\beta_P^2 \sigma_{R_m}^2$  est alors la variance systématique de  $P$  (non-diversifiable)

- $\sigma_\varepsilon^2$  est alors la variance idiosyncratique de  $P$  (diversifiable)



## LE MODÈLE DE MARCHÉ : EXEMPLE

- ▶ Soit  $N$  titres et  $\sigma_{R_m} = 20\%$  et  $\sigma_\varepsilon = 50\%, \forall i$
- ▶ Pour  $\beta_i = 0.9, \forall i$ , calculez
  - ▶ la variance systématique de chaque actif  $i$
  - ▶ la variance idiosyncratique de chaque actif  $i$
  - ▶ la variance de chaque actif  $i$  à l'aide du modèle de marché
- ▶ Soit un portefeuille équi-pondéré de  $N$  titres
- ▶ Calculez
  - ▶ le bêta de portefeuille
  - ▶ la variance idiosyncratique du portefeuille
  - ▶ la variance systématique du portefeuille
- ▶ Discutez la variance spécifique (diversifiable) pour  $N = 1, N = 10, N = 100$

# LE MODÈLE DE MARCHÉ : EXEMPLE

- ▶ Pour  $\beta_i = 0.9, \forall i$  :
  - ▶ la variance systématique de  $i$  est  $\beta_i^2 \sigma_{R_m}^2 = 0.9^2 \times 0.04 = 0.0324$
  - ▶ la variance idiosyncratique de  $i$  est  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.5^2$
  - ▶ la variance de chaque actif  $i$  est  $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_\varepsilon^2 = 0.2824$
- ▶ Concernant le portefeuille
  - ▶ le bêta est  $\beta_P = N^{-1} \sum_{i=1}^N \beta_i = 0.9$
  - ▶ la variance idiosyncratique est  $\text{var}(\varepsilon_P) = \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.25N^{-1}$
  - ▶ la variance systématique est  $\beta_P^2 \sigma_{R_m}^2 = 0.9^2 \times 0.04 = 0.0324$
  - ▶ la variance du portefeuille est  $\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_{\varepsilon_P}^2$
- ▶ Discutez la variance spécifique (diversifiable) pour  $N = 1, N = 8, N = 60$

# LE MODÈLE DE MARCHÉ : EXEMPLE

- ▶ Pour  $\beta_i = 0.9, \forall i$  :
  - ▶ la variance systématique de  $i$  est  $\beta_i^2 \sigma_{R_m}^2 = 0.9^2 \times 0.04 = 0.0324$
  - ▶ la variance idiosyncratique de  $i$  est  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.5^2$
  - ▶ la variance de chaque actif  $i$  est  $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_\varepsilon^2 = 0.2824$
  
- ▶ Concernant le portefeuille
  - ▶ le bêta est  $\beta_P = N^{-1} \sum_{i=1}^N \beta_i = 0.9$
  - ▶ la variance idiosyncratique est  $\text{var}(\varepsilon_P) = \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.25 N^{-1}$
  - ▶ la variance systématique est  $\beta_P^2 \sigma_{R_m}^2 = 0.9^2 \times 0.04 = 0.0324$
  - ▶ la variance du portefeuille est  $\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_{\varepsilon_P}^2$
  
- ▶ Discutez la variance spécifique (diversifiable) pour  $N = 1, N = 8, N = 60$ 
  - ▶  $N = 1 : \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.25 \gg 0.0324$
  - ▶  $N = 8 : \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.03125 < 0.0324$
  - ▶  $N = 60 : \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.00417 \ll 0.0324$

## CONCLUSION

## ET MAINTENANT...

- ▶ On passe à la théorie des options