MÉTHODES ET INSTRUMENTS DE LA FINANCE

Master 1 MBFA

Partie 2

Gilles de Truchis
&
Elena Dumitrescu

Site : **www.varennes-ecofin.com/**

PLAN DES CHAPITRES

RAPPELS STATISTIQUES

PLAN

VARIABLES STATISTIQUES

- La statistique descriptive s'intéresse à l'étude des **populations**
  - Une **population** est une ensemble d'unités statistiques
- On travaille souvent sur un **échantillon** de cette population
- On classe également souvent la population en sous-ensembles
  - On parle alors de **caractères** ou **variables statistiques**
- Les valeurs possibles prises par ces variables sont des **modalités**
- On notera $x_i = x_1, x_2, \ldots, x_n$ une variable statistique
- On notera $c_i = c_1, c_2, \ldots, c_n$ les effectifs **associés** à chaque modalité

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = N$$

avec N la taille de la population

LES MOYENNES

- Soit une variable statistique $x_i = x_1, x_2, \ldots, x_n$
  - Si $c_i = 1 \;\; \forall i$, on a que $n = N$

- Moyenne arithmétique de la population :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Moyenne arithmétique pondérée de la population :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

MESURES DE DISPERSION : LA VARIANCE ET L'ÉCART-TYPE

- La variance : de combien en moyenne on s'écarte de la moyenne

$$V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c_i\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 - 2\bar{x}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \bar{x}^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c_i$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

- L'écart type :

$$\sigma = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - \bar{x})^2\right)^{1/2}$$

- Si on travaille sur un échantillon et non la population entière, on remplacera n^{-1} par $n(n-1)^{-1}$ pour le calcul de σ^2 et σ

MOMENTS EMPIRIQUES

- Le **moment empirique** d'ordre r et d'origine α est donné par :

$$M_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - \alpha)^r$$

- Le **moment empirique ordinaires** d'ordre r est donné par :

$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^r$$

- Le **moment empirique centré** d'ordre r est donné par :

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - \bar{x})^r$$

MOMENTS ET DISTRIBUTION

- Les **moments empiriques** caractérisent l'allure d'une distribution

- Les moments centrés d'ordre 1 et 2 sont donc
  - $\mu_1 = m_1 - m_1 = 0$
  - $\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \sigma^2$

- Le 3ème moment centré est le **skewness** :

$$\mu_3 = m_3 + 2m_3^3 - 3m_1 m_2$$

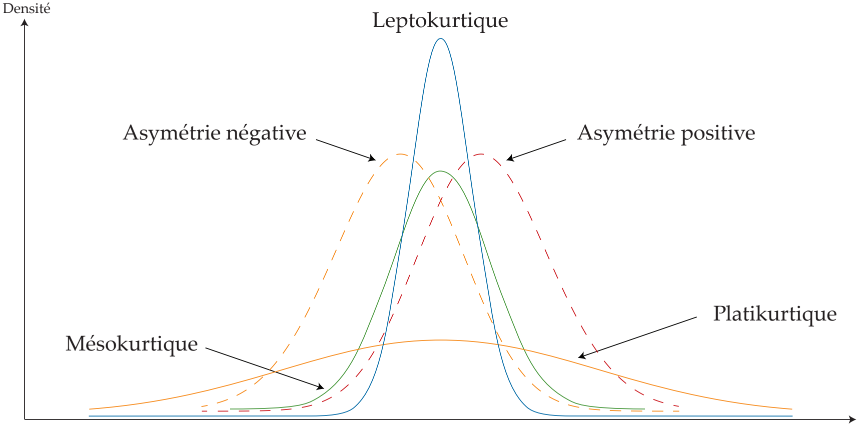
  - Le skewness détermine l'asymétrie de la distribution

- Le 4ème moment centré est le **kurtosis** :

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4$$

  - Le kurtosis détermine l'aplatissement de la distribution

MOMENTS ET DISTRIBUTION : ILLUSTRATION



COVARIANCE ET CORRÉLATION

- Soit deux variables $x_i = x_1, x_2, \ldots, x_r$ et $y_j = y_j, y_j, \ldots, y_s$
  - La covariance empirique entre x_i et y_j, est donnée par

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{c_{..}} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

avec $c_{..}$ le nombre d'observations ayant à la fois les modalités x_i et y_j

  - La coefficient de corrélation de Pearson permet d'évaluer le degré de dépendance linéaire entre deux variables

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

  - Il est borné entre -1 (dépendance négative parfaite) et $+1$ (dépendance positive parfaite)
  - Un coefficient de zéro caractérise l'indépendance

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

- Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$
  - Ω représente l'ensemble **dénombrable** des éventualités
  - $\mathcal{F}$ représente les événements
  - $\Pr$ représente une loi de probabilité
    - $\Pr(A)$ donne la probabilité de l'événement A

- Une variable aléatoire discrète est une fonction application $X : \Omega \to X(\Omega)$, avec $X(\Omega)$ un espace mesurable, telle que

$$\Pr(X = x_i) = \Pr\left(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\}\right)$$

  - Pour $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$, X est une variable aléatoire réelle

- Une série temporelle est une suite de variables aléatoires indexées par le temps : $\{X_t\}_1^n, \quad t \in \mathbb{N}$
  - Pour alléger la notation on notera $\{X_t\}_1^n$ simplement X_t

- Si les éléments de x_t ont tous la même loi de probabilité et sont indépendants on parle de variable $\mathrm{i.i.d.}$

LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

- Une variable aléatoire discrète est caractérisée par sa loi de probabilité
  - Il s'agit de l'application $\Pr(X = x_i)$ définie pour toutes les réalisations $x_i \in X(\Omega)$ avec

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} \Pr(X = x_i) = 1$$

- A une loi de probabilité, on peut associer une **fonction de masse** définie comme

$$f_X(x_i) = \Pr(X = x_i), \quad \forall x_i \in X(\Omega)$$

- A une loi de probabilité, on peut également associer une **fonction de répartition** définie comme

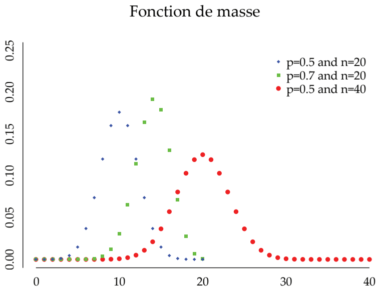
$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{x_i \in X(\Omega),\ x_i \leq x} \Pr(X = x_i), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

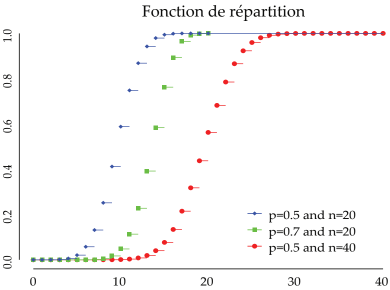
EXEMPLE DE LA LOI BINOMIALE

- La fonction de masse de la loi binomiale est donnée par

$$\Pr(X = x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}, \quad \forall x_i \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$\Rightarrow$ probabilité d'obtenir p "succès" après de n épreuves de Bernouilli





- Planche de Galton : convergence d'une loi binomiale vers une loi normale

LES MOMENTS D'UNE VARIABLE DISCRÈTE

- On peut dériver les moments théoriques de loi de probabilité X
- Le **moment ordinaire** d'ordre k de X est donné par :

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(x)$$

- Le **moment centré** d'ordre k de x est donné par :

$$\mu_k = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^k\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - \mathbb{E}(X)\big)^k dF_X(x)$$

  - Le moment d'ordre 2 (la variance) sera également noté $\mathbb{V}(X)$
- Pour les moments centrés de $X(\Omega) = X_1, X_2, \ldots, X_n$ on obtient

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - \mathbb{E}(X)\big)^k \Pr(X = x_i)$$

LA GÉNÉRATRICE DE MOMENTS

- Les moments peuvent se calculer à partir d'une loi de distribution grâce à la fonction génératrice des moments
  - Pour une fonction de répartition $F_X(x)$ d'une variable aléatoire X, on a

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_X(x) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} \Pr(X = x_i)$$

  - ... dont le développement en série donne

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \dots\right) dF_X(x)$$

  - ... ce qui permet d'écrire

$$M_X(t) = 1 + tm_1 + \frac{t^2 m_2}{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{t^k}{k!}$$

  - La dérivée k-ième par rapport à t autour de 0 donne le moment d'ordre k

$$m_k = \frac{\partial^k M_X(t)}{\partial t^k}\Big|_{t=0}$$

LA GÉNÉRATRICE DE MOMENTS

- Exemple : soit une loi géométrique de fonction de masse : $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
  - On considére une épreuve de Bernouilli qu'on renouvelle jusqu'au premier succès
  - On nomme X la variable aléatoire donnant le rang k du premier succès
- On admet que la fonction génératrice de moment de cette loi est

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

- Calculons le moment ordinaire d'ordre 1 :

LA GÉNÉRATRICE DE MOMENTS

- Exemple : soit une loi géométrique de fonction de masse : $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
  - On considére une épreuve de Bernouilli qu'on renouvelle jusqu'au premier succès
  - On nomme X la variable aléatoire donnant le rang k du premier succès
- On admet que la fonction génératrice de moment de cette loi est

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

- Calculons le moment ordinaire d'ordre 1 :

$$m_1 = \mathbb{E}(X) = \frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{pe^0}{(1-(1-p)e^0)^2} = \frac{1}{p}$$

- Calculons le moment ordinaire d'ordre 2 (on note $q = 1-p$) :

LA GÉNÉRATRICE DE MOMENTS

- Exemple : soit une loi géométrique de fonction de masse : $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
  - On considére une épreuve de Bernouilli qu'on renouvelle jusqu'au premier succès
  - On nomme X la variable aléatoire donnant le rang k du premier succès
- On admet que la fonction génératrice de moment de cette loi est

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

- Calculons le moment ordinaire d'ordre 1 :

$$m_1 = \mathbb{E}(X) = \frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{pe^0}{(1-(1-p)e^0)^2} = \frac{1}{p}$$

- Calculons le moment ordinaire d'ordre 2 (on note $q = 1-p$) :

$$m_2 = \mathbb{E}(X^2) = \frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \frac{pe^0(1+2q-2(q+q^2)e^0+q^2e^0}{(1-qe^0)^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

- On en déduit aisément la variance : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (1-p)p^{-2}$

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

- Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$
  - Ω représente l'ensemble **non dénombrable** des éventualités
  - $\mathcal{F}$ représente les événements
  - $\Pr$ représente une loi de probabilité
    - $\Pr(A)$ donne la probabilité de l'événement A

- Une variable aléatoire continue est une fonction application $X : \Omega \to X(\Omega)$, telle que pour tout intervalle $I \in X(\Omega)$,

$$\Pr(X \in I) = \Pr\left(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in I\}\right)$$

LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

- Une variable continue se différencie d'une variable discrète
  - En effet, la continuité implique que pour une réalisation particulière x

$$\Pr(X = x) = 0, \quad \forall x \in X(\Omega)$$

  - A la loi de probabilité de X on associe alors une **fonction de densité**

- Pour une variable réelle, i.e. $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$, la fonction de densité $f_X(x)$ de la loi de probabilité de X existe si :
  - $f_X(x)$ est définie sur le support $X(\Omega)$
  - $f_X(x)$ est positive ou nulle
  - $f_X(x)$ est intégrable
  - $\forall (a, b) \in X(\Omega)$, $f_X(x)$ est telle que

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

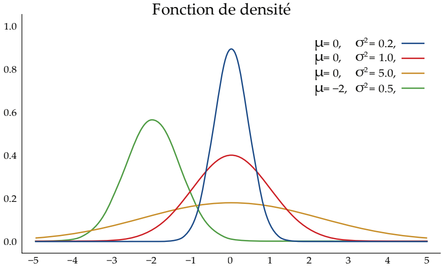
- La **fonction de répartition** est définie comme

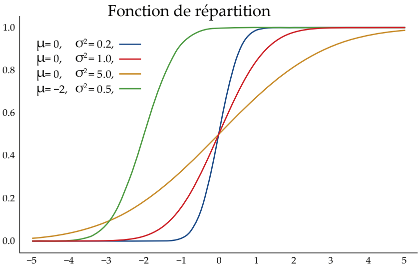
$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

EXEMPLE DE LA LOI NORMALE

- La fonction de densité de la loi normale est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$





LES MOMENTS D'UNE VARIABLE CONTINUE :

- Si x_t est une variable aléatoire réelle continue
- Les 2 premiers **moments ordinaires** de X sont

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X f_X(X) dX, \;\; \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f_X(X) dX$$

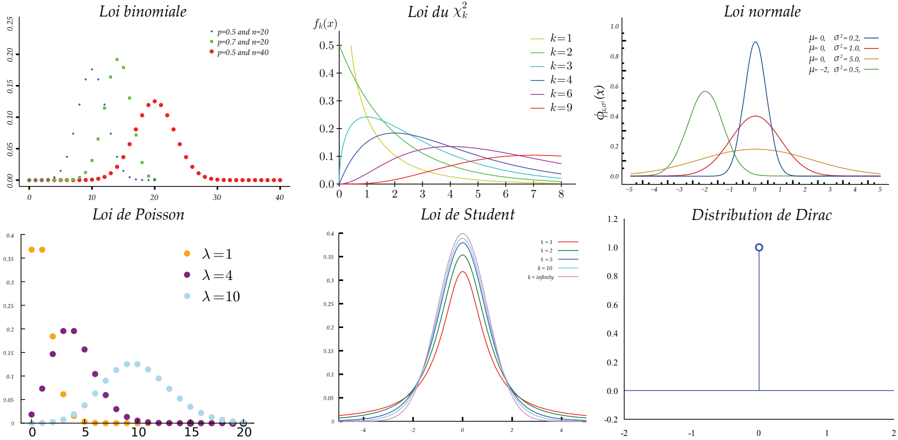
- Les **moments centrés** d'ordre r de la variable x sont ainsi donnés

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mathbb{E}(X))^r f_X(X) dX$$

⚠Les moments n'existent pas toujours !

DISTRIBUTIONS

- Il existe un très grand nombre de lois de probabilité
  - Lois discrètes : Loi binomiale, Loi de Poisson, ...
  - Lois continues : Loi du χ^2, Loi normale, Loi de Student, ...



LA FINANCE EN AVENIR INCERTAIN

PLAN

INTRODUCTION À LA THÉORIE DU CHOIX

- Du fait de l'imprévisibilité de la dynamique des actifs, les gains et les pertes sont incertains
- Un investisseur doit donc faire des choix entre différentes alternatives menant à des gains ou des pertes aléatoires
  - $\Rightarrow$ Comment déterminer la **décision optimale** pour un investisseur ?
- Pour simplifier notre vision de ce problème complexe, considérons tout cela comme une loterie
  - Soit, $\tilde{W}$ les variables aléatoires liées aux gains ou aux pertes

$$\tilde{W} = (w_1, ..., w_n)'$$

  - Soit, P les probabilités associés à ces gains ou pertes

$$P = (p_1, ..., p_n)'$$

UN PREMIER CRITÈRE

- Un premier raisonnement (simpliste) consiste à dire que l'attrait pour cette loterie est uniquement déterminé par son espérance de gain

$$\mathbb{E}(\tilde{W}) = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i$$

- Avec un tel critère, un individu rationnel devrait toujours choisir la loterie avec l'espérance de gain la plus élevée

- L'individu devrait même être indifférent entre une somme certaine égale $\mathbb{E}(\tilde{W})$ et une loterie dont le gain serait $\tilde{W}$
  - ⇒ le **prix pour participer à la loterie** que l'individu est prêt à payer est donc donné par $\mathbb{E}(\tilde{W}) = \tilde{W}$

- Ces conclusions, et surtout ce dernier résultat, sont en fait **insatisfaisant**

CONTRE-EXEMPLE

- Considérons une loterie $\tilde{X}$ donnant :

$$\tilde{X} = \begin{cases} 0 & \text{avec une proba de 1/2} \\ 20000 & \text{avec une proba de 1/2} \end{cases} \tag{1}$$

- L'espérance de gain de cette loterie est donc :

CONTRE-EXEMPLE

- Considérons une loterie $\tilde{X}$ donnant :

$$\tilde{X} = \begin{cases} 0 & \text{avec une proba de } 1/2 \\ 20000 & \text{avec une proba de } 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

- L'espérance de gain de cette loterie est donc :

$$\mathbb{E}(\tilde{X}) = 0.5 \times 0 + 0.5 \times 20000 = 10000$$

- Pourtant, la plupart des individus préfereront une somme certaine de 10000€ à $\tilde{X}$
  $\Rightarrow$ l'utilité marginale de l'€ supplémentaire décroit

- Pourquoi ? Considérerons que l'agent classe par ordre de priorité ces projets
  - Les premiers 10000€ seront affectés au projet le plus utile
  - Les prochains 10000€ seront affectés à un projet un peu moins utile

  $\Rightarrow$ L'utilité de 20000€ est **inférieur** au double de l'utilité de 10000€

LE PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG

- Il s'agit d'un jeu : une pièce tirée n fois jusqu'à ce qu'elle tombe sur "face"
- La probabilité que n tirages aboutisse à l'évènement "face" est alors

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- La loterie donne $\tilde{W} = 2^n$ €
  - $\Rightarrow$ 2€ si "face" après un tirage
  - $\Rightarrow$ 4€ si "face" après deux tirages
  - $\Rightarrow$ ...
- L'espérance de gain est alors :

LE PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG

- Il s'agit d'un jeu : une pièce tirée n fois jusqu'à ce qu'elle tombe sur “face”

- La probabilité que n tirages aboutisse à l'évènement “face” est alors

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- La loterie donne $\tilde{W} = 2^n$ €
  - ⇒ 2€ si “face” après un tirage
  - ⇒ 4€ si “face” après deux tirages
  - ⇒ ...

- L'espérance de gain est alors :

$$\mathbb{E}(\tilde{W}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \infty$$

- **Question :** quel somme seriez-vous prêt à débourser pour jouer ?

L'UTILITÉ MARGINALE DÉCROISSANTE

$\Rightarrow$ Vous préférez une somme certaine W à une somme incertaine $\tilde{W}$ alors même que $W < \mathbb{E}(\tilde{W}) = \infty$

- Ce comportement traduit votre **aversion au risque**
- Autrement dit, l'utilité marginale de l'euro supplémentaire décroît avec la richesse
  $\Rightarrow$ l'utilité de $2x$€ est plus faible que 2 fois l'utilité de x€
- **Question :** Comment tenir compte de ce comportement dans l'évaluation de l'attrait d'une loterie ?

$\Rightarrow$ **Réponse :** En tenant compte de la fonction d'utilité de l'agent dans le calcul de l'espérance

L'ESPÉRANCE DE L'UTILITÉ

- Considérons une fonction d'utilité U et supposons cette fonction
  - croissante : l'utilité croît avec la richesse
  - concave : l'utilité marginale décroît avec la richesse
- Choisissons e.g. la fonction logarithme : $U(x) = \ln(x)$
- Reprenons le calcul précédent mais cette fois pour $\mathbb{E}[U(\tilde{W})]$:

$$\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} U(2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n)$$

- Après quelques calculs on obtient la somme certaine qui égalise $\tilde{W}$
  $\Rightarrow$ le **prix pour participer à la loterie** que l'individu est prêt à payer est 4

DÉMONSTRATION

- On part de $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n) = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- Or, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ est une suite proche de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ de limite $1/(1-x)$
- Quelle transformation de cette suite nous permet de retrouver $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$?

DÉMONSTRATION

- On part de $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n) = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- Or, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ est une suite proche de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ de limite $1/(1-x)$
- Quelle transformation de cette suite nous permet de retrouver $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$?
- Essayons $(\partial suite/\partial x)x$; on obtient

DÉMONSTRATION

- On part de $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n) = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- Or, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ est une suite proche de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ de limite $1/(1-x)$
- Quelle transformation de cette suite nous permet de retrouver $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$?
- Essayons $(\partial suite/\partial x)x$; on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \quad \text{et donc une limite de } \; x/(1-x)^2, \quad |x| < 1$$

car $\partial limsuite/\partial x = 1/(1-x)^2$

- Or, pour $x = 1/2$ on trouve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$
- On a donc $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 2\ln(2) = \ln(4)$, i.e. 4€ car $\exp(\ln(4)) = 4$

$\Rightarrow$ on verra par la suite pourquoi on utilise la fonction $\exp$ quand l'utilité est $\ln(.)$

LE CRITÈRE DE L'UTILITÉ ESPÉRÉE

- Un individu **rationnel** pourra alors utilisé l'utilité espérée comme critère pour prendre une **décision optimale**
- Cette décision sera propre à l'individu car elle dépendra de son utilité

⇒ Pour une fonction $U(x)$, une décision d dans le set des décisions $\mathscr{D}$ menant à un gain aléatoire $\tilde{W}(d)$ sera donnée par la solution du programme

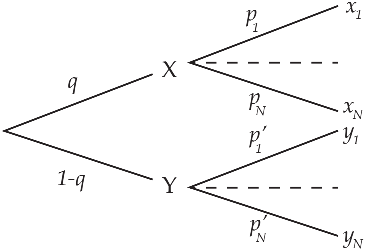
$$\max_{d \in \mathscr{D}} \mathbb{E}[U(\tilde{W}(d))]$$

L'AXIOMATIQUE DE VON NEUMAN ET MORGENSTERN

- Les résultats précédent tiennent s'ils s'inscrivent dans un cadre théorique bien précis de **rationalité** de l'individu

- Ce cadre est établit par une suite **d'axiomes** proposés par Von Neuman et Morgenstern

- Définitions :
  - Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des loteries
  - Soit X, Y et Z des loteries simples et $X, Y, Z \in \mathscr{L}$
  - X et Y sont composites (non-simples), noté $(X, Y; q)$, si :



L'AXIOMATIQUE DE VON NEUMAN ET MORGENSTERN

- **Axiome 1 : comparabilité**
  - L'individu soit préfère X à Y : $X \succ Y$
  - soit préfère Y à X : $Y \succ X$
  - soit est indifférent entre X et Y : $X \sim Y$

- **Axiome 2 : transitivité**
  - Pour un individu **rationnel**, $X \succcurlyeq Y$ et $Y \succcurlyeq Z$ implique $X \succcurlyeq Z$
  - avec $\succcurlyeq$ signifiant la préférence ou l'indifférence

- **Axiome 3 : indépendance**
  - Soit 3 loteries, X, Y et Z et $\alpha \in [0, 1]$
  - Si $X \succ Y$ alors $\alpha X + (1 - \alpha)Z \succ \alpha Y + (1 - \alpha)Z$

- **Axiome 4 : réflexivité**
  - $X \succcurlyeq X \;\; \forall \;\; X \in \mathscr{L}$

L'AXIOMATIQUE DE VON NEUMAN ET MORGENSTERN

- **Axiome 5 : continuité**
  - Pour $X, Y, Z \in \mathscr{L}$ avec $X \succ Z$ et $X \succcurlyeq Y \succcurlyeq Z$ alors $\exists p, q \in [0, 1]$ tels que

$$\alpha X + (1-\alpha)Z \succ Y \succ \beta Y + (1-\beta)Z$$

- **Axiome 6 : réduction des loteries composées**
  - Un agent doit être indifférent entre une loterie X qui lui donne 25% de chance de gagner 100 et une loterie Y qui lui donne 50% de chances de gagner une loterie Z qui donne 50% de chances de gagner 100.

⇒ **Si ces axiomes sont vérifiés**
  - Alors il existe une fonction d'utilité VNM $U(.)$ tel que $\forall X, Y$ on a $X \succ Y$ si et seulement si

$$\mathbb{E}_X(U(\tilde{W})) > \mathbb{E}_Y(U(\tilde{W}))$$

  - Si on suppose que l'agent dispose d'un préordre complet sur les conséquences (relation de préférence et d'indifférence sur les conséquences), alors la définition d'une relation de préférence sur les loteries suffit à caractériser le comportement vis-à-vis du risque d'un agent
  - Cette relation de préférence doit respecter les axiomes VNM pour que la fonction d'utilité VNM existe

PLAN

UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- Pour un minimum de réalisme, la fonction d'utilité $U(x)$ doit refléter
  - l'appétit pour la richesse
  - mais également l'aversion au risque

- Pour s'assurer de cela, la fonction doit être dérivable deux fois avec :

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} < 0$$

  - monotonie croissante : l'utilité croît avec la richesse
  - concavité : l'utilité marginale décroît avec la richesse

- **Question :** Mais pourquoi la concavité traduit-elle l'aversion au risque ?

EQUIVALENT CERTAIN ET PRIME DE RISQUE

- Vous préférez payer 1 € ou jouer à pile ou face ($\tilde{W}$) ?
  - face vous perdez 8€
  - pile vous gagnez 10€

EQUIVALENT CERTAIN ET PRIME DE RISQUE

- Vous préférez payer 1 € ou jouer à pile ou face ($\tilde{W}$) ?
  - face vous perdez 8€
  - pile vous gagnez 10€
- Pour certains, perdre 8€ n'est pas effrayant $\Rightarrow$ jeu
- Pour certains, perdre 8€ est effrayant $\Rightarrow$ -1€
- Certains sont indifférents entre -1€ et la loterie

$\Rightarrow$ Cela implique d'attribuer un “coût” au risque : **prime de risque**

- **Définition :** prix que l'agent est prêt à payer pour s'affranchir du risque

$\Rightarrow$ Il existe une somme certaine c telle que vous êtes indifférent entre c et jouer pour gagner $E(\tilde{W})$: **équivalent certain**

UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

Illustration 1

- Soit une loterie qui génère $\tilde{W}$ avec

$$\tilde{W} = \begin{cases} \omega_1 & \text{avec une proba de } 1/2 \\ \omega_2 & \text{avec une proba de } 1/2 \end{cases}$$

- On a donc $\mathbb{E}[\tilde{W}] = (\omega_1 + \omega_2)/2$. En considérant une utilité concave on a

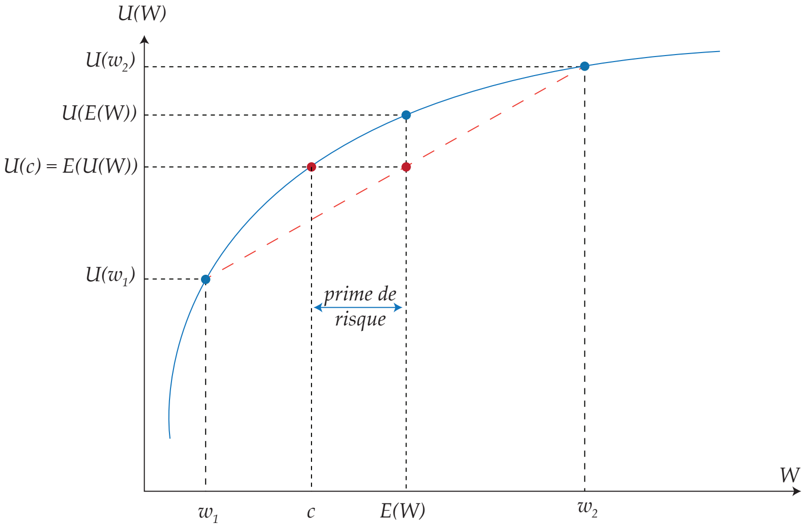
$$\mathbb{E}[U(\tilde{W})] = \frac{U(\omega_1) + U(\omega_2)}{2}$$

- De ce résultat on peut déduire l'**équivalent certain** de $\tilde{W}$ noté $c : \mathbb{E}[U(\tilde{W})] = U(c)$

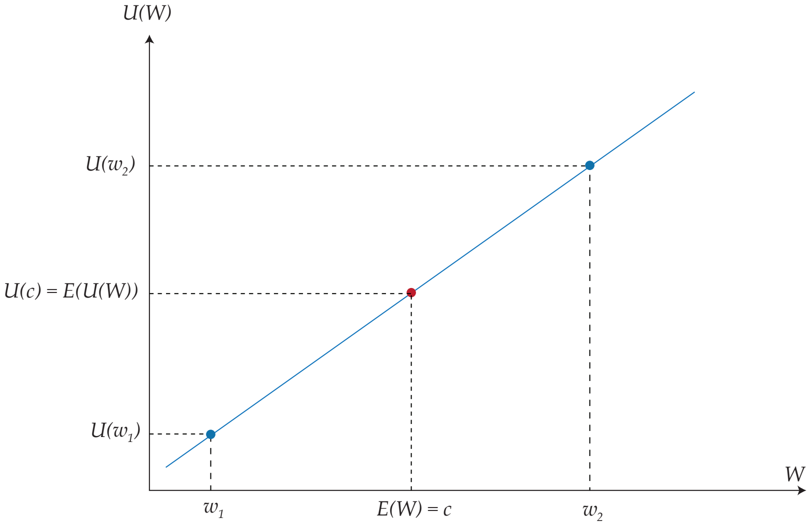
- Du fait de la concavité de U on a $c < \mathbb{E}[\tilde{W}] = (\omega_1 + \omega_2)/2$ et donc

$$\mathbb{E}[U(\tilde{W})] = U(c) < U((\omega_1 + \omega_2)/2) = U[\mathbb{E}(\tilde{W})]$$

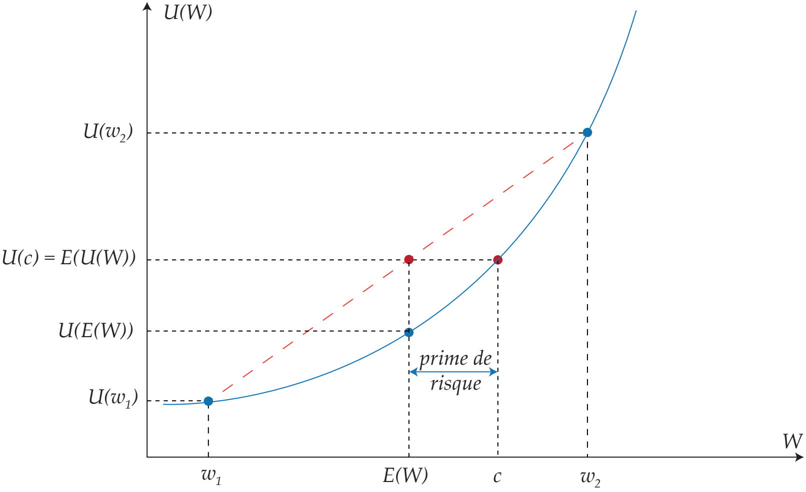
L'AVERSION AU RISQUE :



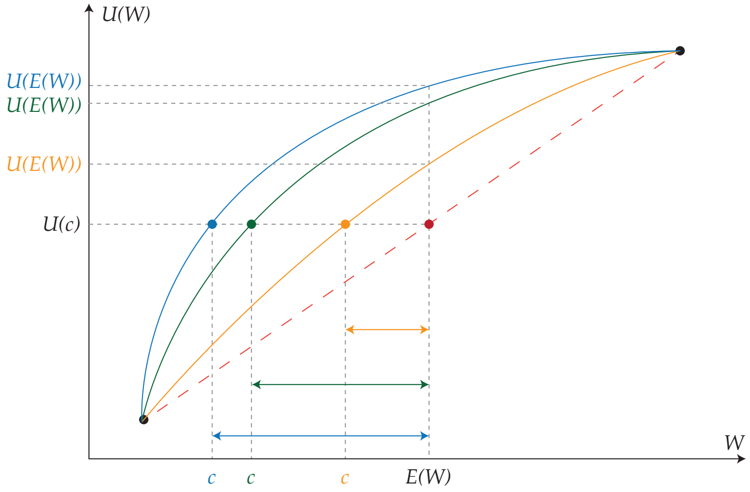
LA NEUTRALITÉ FACE AU RISQUE :



LES AMOUREUX DU RISQUE :



CONCAVITÉ ET AVERSION AU RISQUE



EQUIVALENT CERTAIN

- L'équivalent certain est donc le montant certain c qui procure la même utilité que $\tilde{W}$
- On peut calculer c à condition que $U(.)$ soit une bijection
  - En effet, on sait que
$$U(c) = \underbrace{\mathbb{E}(U(\tilde{W}))}_{\text{notons ce terme } x}$$
  - On cherche la bijection reciproque $U^{-1}(.)$ qui donne l'unique antécédent c de la bijection $U(.)$ tel que $U(c) = x$:
$$c = U^{-1}(x)$$

EXEMPLES D'APPLICATION INVERSE

- Pour $f(x) = x^{\alpha}$ la fonction réciproque est

EXEMPLES D'APPLICATION INVERSE

- Pour $f(x) = x^{\alpha}$ la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$$

- Pour $f(x) = e^{x}$ la fonction réciproque est

EXEMPLES D'APPLICATION INVERSE

- Pour $f(x) = x^\alpha$ la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$$

- Pour $f(x) = e^x$ la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

- Pour $f(x) = a^x$ la fonction réciproque est

EXEMPLES D'APPLICATION INVERSE

- Pour $f(x) = x^\alpha$ la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$$

- Pour $f(x) = e^x$ la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

- Pour $f(x) = a^x$ la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = \ln_a(x)$$

EXEMPLE DE PRIME DE RISQUE

- L'écart entre le gain espéré et l'équivalent certain = la **prime de risque**
- Soit $\tilde{W}$ qui donne 25000€ et 15000€ avec des proba équivalentes
  - L'espérance de gain est

EXEMPLE DE PRIME DE RISQUE

- L'écart entre le gain espéré et l'équivalent certain = la **prime de risque**
- Soit $\tilde{W}$ qui donne 25000€ et 15000€ avec des proba équivalentes
  - L'espérance de gain est

$$\mathbb{E}[\tilde{W}] = \frac{1}{2}25000 + \frac{1}{2}15000 = 20000$$

  - Sous l'hypothèse d'une utilité logarithmique on aura :

EXEMPLE DE PRIME DE RISQUE

- L'écart entre le gain espéré et l'équivalent certain = la **prime de risque**
- Soit $\tilde{W}$ qui donne 25000€ et 15000€ avec des proba équivalentes
  - L'espérance de gain est
$$\mathbb{E}[\tilde{W}] = \frac{1}{2}25000 + \frac{1}{2}15000 = 20000$$
  - Sous l'hypothèse d'une utilité logarithmique on aura :
$$\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \frac{1}{2}\ln(25000) + \frac{1}{2}\ln(15000) = 9.871218$$
  - Or, l'équivalent certain est de

EXEMPLE DE PRIME DE RISQUE

- L'écart entre le gain espéré et l'équivalent certain = la **prime de risque**

- Soit $\tilde{W}$ qui donne 25000€ et 15000€ avec des proba équivalentes
  - L'espérance de gain est
$$\mathbb{E}[\tilde{W}] = \frac{1}{2}25000 + \frac{1}{2}15000 = 20000$$
  - Sous l'hypothèse d'une utilité logarithmique on aura :
$$\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \frac{1}{2}\ln(25000) + \frac{1}{2}\ln(15000) = 9.871218$$
  - Or, l'équivalent certain est de
$$\ln^{-1}(9.871218) = e^{9.871218} = 19364,92 \Rightarrow \ln(19364,92) = 9.871218$$
- La prime de risque est donc de $\pi = 20000 - 19364,92 = 635.08 > 0$

$\Rightarrow$ Cette loterie incertaine $\tilde{W}$ a moins d'attrait qu'une somme certaine égale à $\mathbb{E}[\tilde{W}]$ puisque $c < \mathbb{E}[\tilde{W}]$

UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- Soit un investisseur u possédant $W_0 = 10000€$
  - W_0 est une richesse initiale certaine
  - Mais u est confronté à une loterie $\tilde{\varepsilon}$ qui génère une incertitude sur W_0 :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} -2000 \text{ avec } p = 5/8 \\ 4000 \text{ avec } 1-p = 3/8 \end{cases} \Rightarrow W_0 + \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} 8000 \text{ avec } p = 5/8 \\ 14000 \text{ avec } 1-p = 3/8 \end{cases}$$

- En supposant une log-utilité pour u, l'espérance de $U(.)$ est :

UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- Soit un investisseur u possédant $W_0 = 10000€$
  - W_0 est une richesse initiale certaine
  - Mais u est confronté à une loterie $\tilde{\varepsilon}$ qui génère une incertitude sur W_0 :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} -2000 \text{ avec } p = 5/8 \\ 4000 \text{ avec } 1-p = 3/8 \end{cases} \Rightarrow W_0 + \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} 8000 \text{ avec } p = 5/8 \\ 14000 \text{ avec } 1-p = 3/8 \end{cases}$$

- En supposant une log-utilité pour u, l'espérance de $U(.)$ est :

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8}\ln(8000) + \frac{3}{8}\ln(14000) = 9.197053$$

On a donc $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$

- L'équivalent certain est alors

UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- Soit un investisseur u possédant $W_0 = 10000€$
  - W_0 est une richesse initiale certaine
  - Mais u est confronté à une loterie $\tilde{\varepsilon}$ qui génère une incertitude sur W_0 :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} -2000 \text{ avec } p = 5/8 \\ 4000 \text{ avec } 1 - p = 3/8 \end{cases} \Rightarrow W_0 + \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} 8000 \text{ avec } p = 5/8 \\ 14000 \text{ avec } 1 - p = 3/8 \end{cases}$$

- En supposant une log-utilité pour u, l'espérance de $U(.)$ est :

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8}\ln(8000) + \frac{3}{8}\ln(14000) = 9.197053$$

On a donc $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$

  - L'équivalent certain est alors

$$c = e^{9.197053} = 9868.0026$$

  - La prime de risque est alors

UTILITÉ ET AVERSION AU RISQUE

- Soit un investisseur u possédant $W_0 = 10000€$
  - W_0 est une richesse initiale certaine
  - Mais u est confronté à une loterie $\tilde{\varepsilon}$ qui génère une incertitude sur W_0 :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} -2000 \text{ avec } p = 5/8 \\ 4000 \text{ avec } 1-p = 3/8 \end{cases} \Rightarrow W_0 + \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} 8000 \text{ avec } p = 5/8 \\ 14000 \text{ avec } 1-p = 3/8 \end{cases}$$

- En supposant une log-utilité pour u, l'espérance de $U(.)$ est :

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8}\ln(8000) + \frac{3}{8}\ln(14000) = 9.197053$$

On a donc $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$

  - L'équivalent certain est alors

$$c = e^{9.197053} = 9868.0026$$

  - La prime de risque est alors

$$\pi = 10250 - 9868.0026 = 381.9974$$

PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- L'équivalent certain révèlent que l'investisseur u est averse au risque
  - Pour se débarrasser du risque, il serait prêt à vendre $\tilde{\varepsilon}$ mais combien ?

- **Définition :** Le prix de vente p_ε de la partie aléatoire $\tilde{\varepsilon}$ de $\tilde{W}$ est le prix minimal à partir duquel u est prêt à vendre $\tilde{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ u cède une richesse incertaine $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$
$\Rightarrow$ il récupère une richesse certaine $W = W_0 + \epsilon$

- u vendra au prix ϵ si
  - $U(W_0 + \epsilon) \geq \mathbb{E}(U(\tilde{W})) = U(c)$
  - Si $U(.)$ est monotone croissante, $W_0 + \epsilon \geq c \Longleftrightarrow \epsilon \geq c - W_0$
  - D'après notre définition de p_ε cela veut dire que $p_\varepsilon = c - W_0$

- Dans notre exemple, on obtient que

PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- L'équivalent certain révèlent que l'investisseur u est averse au risque
  - Pour se débarrasser du risque, il serait prêt à vendre $\tilde{\varepsilon}$ mais combien ?

- **Définition :** Le prix de vente p_ε de la partie aléatoire $\tilde{\varepsilon}$ de $\tilde{W}$ est le prix minimal à partir duquel u est prêt à vendre $\tilde{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ u cède une richesse incertaine $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$
$\Rightarrow$ il récupère une richesse certaine $W = W_0 + \epsilon$

- u vendra au prix ϵ si
  - $U(W_0 + \epsilon) \geq \mathbb{E}(U(\tilde{W})) = U(c)$
  - Si $U(.)$ est monotone croissante, $W_0 + \epsilon \geq c \Longleftrightarrow \epsilon \geq c - W_0$
  - D'après notre définition de p_ε cela veut dire que $p_\varepsilon = c - W_0$

- Dans notre exemple, on obtient que

$$p_\varepsilon = -131.9974$$

$p_\varepsilon < 0$ montre que u est prêts à payer pour se débarrasser du risque

PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- Étudions la même loterie mais pour des richesses initiales différentes :
  - $\Rightarrow$ Si $W_0 = 5000$
  - $\Rightarrow$ Si $W_0 = 20000$

- Dans le cas $W_0 = 5000$ on obtient

PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- Étudions la même loterie mais pour des richesses initiales différentes :
  - $\Rightarrow$ Si $W_0 = 5000$
  - $\Rightarrow$ Si $W_0 = 20000$

- Dans le cas $W_0 = 5000$ on obtient

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8}\ln(3000) + \frac{3}{8}\ln(9000) = 8.418347176$$

  et donc un équivalent certain de $c = e^{8.418347176} = 4529.41$
  - $\Rightarrow$ $p_\varepsilon = 4529.41 - 5000 = -470.59 < 0$ quand $\pi = 5250 - 4529.41 = 720.59 > 0$

- Dans le cas $W_0 = 20000$ on obtient

PRIX DE VENTE D'UNE LOTERIE

- Étudions la même loterie mais pour des richesses initiales différentes :
  - $\Rightarrow$ Si $W_0 = 5000$
  - $\Rightarrow$ Si $W_0 = 20000$

- Dans le cas $W_0 = 5000$ on obtient

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8}\ln(3000) + \frac{3}{8}\ln(9000) = 8.418347176$$

et donc un équivalent certain de $c = e^{8.418347176} = 4529.41$

$\Rightarrow$ $p_\varepsilon = 4529.41 - 5000 = -470.59 < 0$ quand $\pi = 5250 - 4529.41 = 720.59 > 0$

- Dans le cas $W_0 = 20000$ on obtient

$$\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon})) = \frac{5}{8}\ln(18000) + \frac{3}{8}\ln(24000) = 9.906007814$$

et donc un équivalent certain de $c = e^{9.906007814} = 20050.47$

$\Rightarrow$ $p_\varepsilon = 20050.47 - 20000 = 50.47 > 0$ quand $\pi = 20250 - 20050.47 = 199.53 > 0$

EXERCICE TYPE

- Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine W_0
  - la proba de perdre son job et de toucher une allocation de α est de $1/5$
  - la proba de garder son job et de toucher un salaire de ω est de $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?

EXERCICE TYPE

- Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine W_0
  - la proba de perdre son job et de toucher une allocation de α est de $1/5$
  - la proba de garder son job et de toucher un salaire de ω est de $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?

- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?

EXERCICE TYPE

- Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine W_0
  - la proba de perdre son job et de toucher une allocation de α est de $1/5$
  - la proba de garder son job et de toucher un salaire de ω est de $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } \; 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } \; 4/5 \end{cases}$$

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?

- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?

- Quel est l'équivalent certain du travailleur ?

EXERCICE TYPE

- Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine W_0
  - la proba de perdre son job et de toucher une allocation de α est de $1/5$
  - la proba de garder son job et de toucher un salaire de ω est de $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } \ 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } \ 4/5 \end{cases}$$

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?
- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?
- Quel est l'équivalent certain du travailleur ?
- Calculez la prime de risque de l'employé ?

EXERCICE TYPE

- Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine W_0
  - la proba de perdre son job et de toucher une allocation de α est de $1/5$
  - la proba de garder son job et de toucher un salaire de ω est de $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?
- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?
- Quel est l'équivalent certain du travailleur ?
- Calculez la prime de risque de l'employé ?
- Refaire l'exercice pour $\alpha = 1400€$, $\omega = 2160€$ et $W_0 = 6000€$

EXERCICE TYPE

- Soit un salarié doté d'une richesse initiale certaine W_0
  - la proba de perdre son job et de toucher une allocation de α est de $1/5$
  - la proba de garder son job et de toucher un salaire de ω est de $4/5$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \alpha & \text{avec une proba de } 1/5 \\ \omega & \text{avec une proba de } 4/5 \end{cases}$$

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?
- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?
- Quel est l'équivalent certain du travailleur ?
- Calculez la prime de risque de l'employé ?
- Refaire l'exercice pour $\alpha = 1400€$, $\omega = 2160€$ et $W_0 = 6000€$
- Refaire l'exercice pour $\alpha = 1400€$, $\omega = 2160€$ et $W_0 = 0€$

EXERCICE TYPE

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?
  - $\mathbb{E}(\tilde{W}) = (\alpha + W_0)\frac{1}{5} + (\omega + W_0)\frac{4}{5}$

EXERCICE TYPE

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?
  - $\mathbb{E}(\tilde{W}) = (\alpha + W_0)\frac{1}{5} + (\omega + W_0)\frac{4}{5}$
- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?
  - $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \ln(\alpha + W_0)\frac{1}{5} + \ln(\omega + W_0)\frac{4}{5} = \ln((\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5})$

EXERCICE TYPE

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?
  - $\mathbb{E}(\tilde{W}) = (\alpha + W_0)\frac{1}{5} + (\omega + W_0)\frac{4}{5}$
- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?
  - $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \ln(\alpha + W_0)\frac{1}{5} + \ln(\omega + W_0)\frac{4}{5} = \ln((\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5})$
- Quel est l'équivalent certain du travailleur ?
  - $c = U^{-1}(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) = \exp(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) = (\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5}$

EXERCICE TYPE

- Quel est l'espérance de $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$?
  - $\mathbb{E}(\tilde{W}) = (\alpha + W_0)\frac{1}{5} + (\omega + W_0)\frac{4}{5}$
- En supposant une log-utilité pour le salarié, quel est l'espérance de l'utilité ?
  - $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = \ln(\alpha + W_0)\frac{1}{5} + \ln(\omega + W_0)\frac{4}{5} = \ln((\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5})$
- Quel est l'équivalent certain du travailleur ?
  - $c = U^{-1}(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) = \exp(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) = (\alpha + W_0)^{1/5}(\omega + W_0)^{4/5}$
- Calculez la prime de risque de l'employé ?
  - $\pi = \mathbb{E}(\tilde{W}) - \exp(\mathbb{E}(U(\tilde{W})))$

EXERCICE TYPE

- Refaire l'exercice pour $\alpha = 1400$€, $\omega = 2160$€ et $W_0 = 6000$€

EXERCICE TYPE

- Refaire l'exercice pour $\alpha = 1400$€, $\omega = 2160$€ et $W_0 = 6000$€
  - $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 8008$; $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 8.987447$; $c = 8001.998598$; $\pi = 6.001402$

$\Rightarrow$ Interprétez la prime de risque

EXERCICE TYPE

- Refaire l'exercice pour $\alpha = 1400€$, $\omega = 2160€$ et $W_0 = 6000€$
  - $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 8008$; $\mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 8.987447$; $c = 8001.998598$; $\pi = 6.001402$

  $\Rightarrow$ Interprétez la prime de risque
- Refaire l'exercice pour $\alpha = 1400€$, $\omega = 2160€$ et $W_0 = 0€$

EXERCICE TYPE

- Refaire l'exercice pour $\alpha = 1400€$, $\omega = 2160€$ et $W_0 = 6000€$
  - $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 8008\,;\, \mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 8.987447\,;\, c = 8001.998598\,;\, \pi = 6.001402$

  $\Rightarrow$ Interprétez la prime de risque

- Refaire l'exercice pour $\alpha = 1400€$, $\omega = 2160€$ et $W_0 = 0€$
  - $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 2008\,;\, \mathbb{E}(U(\tilde{W})) = 7.591136\,;\, c = 1980.562756\,;\, \pi = 27.437243$

  $\Rightarrow$ Interprétez la prime de risque

FONDEMENT THÉORIQUE DE LA PRIME DE RISQUE

- Soit un agent dont l'utilité $U(.)$ respecte $U'(.) > 0$ et $U''(.) < 0$
- L'agent dispose d'une richesse $\tilde{W} = W_0 + \tilde{\varepsilon}$ avec :
  - W_0 une richesse initiale certaine
  - $\tilde{\varepsilon}$ $\mathrm{i.\,i.\,d.}\ (0, \sigma_\varepsilon^2)$ une loterie telle que $\mathbb{E}(\tilde{W}) = W_0$
- $\tilde{\varepsilon}$ est donc un aléa qui n'affecte pas $\mathbb{E}(\tilde{W})$ mais réduit $\mathbb{E}(U(.))$

⇒ un agent averse au risque aura une prime de risque $\pi > 0$ dû à $\tilde{\varepsilon}$

- Le montant de cette prime de risque découle de l'équation

$$\underbrace{U(W_0 - \pi)}_{\text{l'utilité de la richesse certaine net de la prime}} = \underset{\text{l'utilité de la richesse aléatoire hors prime}}{\mathbb{E}(U(W_0 + \tilde{\varepsilon}))}$$

FONDEMENT THÉORIQUE DE LA PRIME DE RISQUE

- Un développement de Taylor par rapport à $\tilde{\varepsilon}$ et π nous donne :

FONDEMENT THÉORIQUE DE LA PRIME DE RISQUE

- Un développement de Taylor par rapport à $\tilde{\varepsilon}$ et π nous donne :

$$\begin{aligned} U(W_0) - \pi U'(W_0) + o(\pi) &= \mathbb{E}\Big(U(W_0) + \tilde{\varepsilon} U'(W_0) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^2 U''(W_0) + o(\tilde{\varepsilon}^2) \Big) \\ &= U(W_0) + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 U''(W_0) + o(\sigma_\varepsilon^2) \end{aligned}$$

car $\tilde{\varepsilon}$ $\mathrm{i.\,i.\,d.}\ (0, \sigma_\varepsilon^2)$

- On observe alors que π est donnée par :

FONDEMENT THÉORIQUE DE LA PRIME DE RISQUE

- Un développement de Taylor par rapport à $\tilde{\varepsilon}$ et π nous donne :

$$\begin{aligned} U(W_0) - \pi U'(W_0) + o(\pi) &= \mathbb{E}\Big(U(W_0) + \tilde{\varepsilon} U'(W_0) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^2 U''(W_0) + o(\tilde{\varepsilon}^2) \Big) \\ &= U(W_0) + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 U''(W_0) + o(\sigma_\varepsilon^2) \end{aligned}$$

car $\tilde{\varepsilon}$ $\mathrm{i.\,i.\,d.}\ (0, \sigma_\varepsilon^2)$

- On observe alors que π est donnée par :

$$\pi \approx -\frac{1}{2}\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)}\sigma_\varepsilon^2$$

- Ce résultat montre que la prime de risque dépend de
  - l'intensité du risque σ_ε^2
  - l'aversion au risque $-\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$

MESURE DE L'AVERSION AU RISQUE

- Cette mesure de **l'aversion au risque** fut proposée par Arrow et Pratt

$$A(W_0) = -\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)}$$

  - Ce coefficient est positif car $U'(W_0) > 0$ et $U''(W_0) < 0$

- Une mesure relative existe également :

$$R(W_0) = W_0 A(W_0)$$

- On parle de tolérance absolue et relative au risque pour

$$\frac{1}{A(W_0)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R(W_0)}$$

LES FONCTIONS TYPES : CARA

- Utilité à **aversion absolue constante (CARA)**

$$U(x) = -\frac{1}{A}\exp(-Ax)$$

$\Rightarrow$ Pour $A > 0$ on obtient $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = A$ car

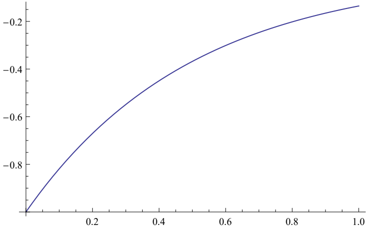
LES FONCTIONS TYPES : CARA

- Utilité à **aversion absolue constante (CARA)**

$$U(x) = -\frac{1}{A}\exp(-Ax)$$

$\Rightarrow$ Pour $A > 0$ on obtient $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = A$ car

$$\frac{-A\exp(-Ax)}{\exp(-Ax)} = -A$$



LES FONCTIONS TYPES : CRRA

- Utilité à **aversion relative constante (CRRA)**

$$U(x) = \frac{1}{1-R}x^{1-R}$$

$\Rightarrow$ Pour $R \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$ on obtient $-x\frac{U''(x)}{U'(x)} = R$ car

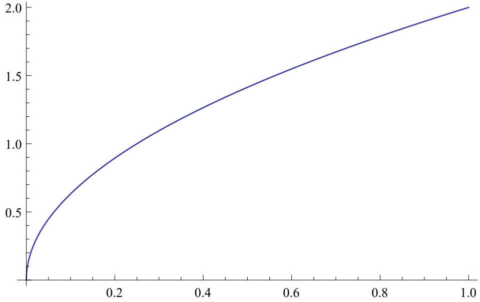
LES FONCTIONS TYPES : CRRA

- Utilité à **aversion relative constante (CRRA)**

$$U(x) = \frac{1}{1-R}x^{1-R}$$

$\Rightarrow$ Pour $R \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$ on obtient $-x\frac{U''(x)}{U'(x)} = R$ car

$$\frac{-Rx^{-1-R}}{x^{-R}} = -R\frac{1}{x}$$



LES FONCTIONS TYPES : CRRA - LN

- Utilité **logarithmique** (cas particulier de fonction CRRA)

$$U(x) = \ln(x)$$

$\Rightarrow$ On obtient $-x\frac{U''(x)}{U'(x)} = 1$ car

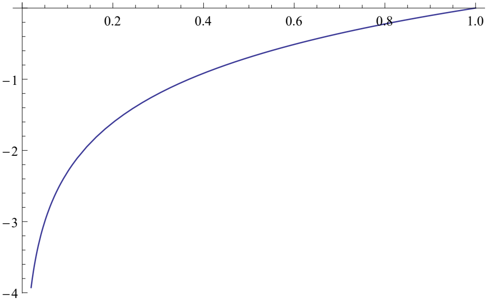
LES FONCTIONS TYPES : CRRA - LN

- Utilité **logarithmique** (cas particulier de fonction CRRA)

$$U(x) = \ln(x)$$

$\Rightarrow$ On obtient $-x\frac{U''(x)}{U'(x)} = 1$ car

$$\frac{-x^{-2}}{x^{-1}} = -\frac{1}{x}$$

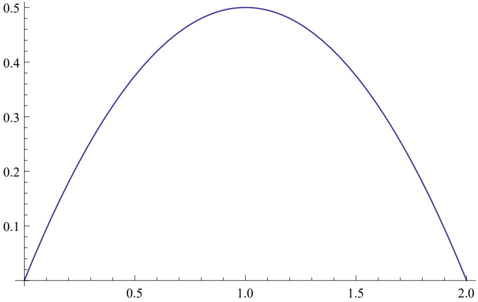


LES FONCTIONS TYPES : QUADRATIQUE

- Utilité **quadratique**

$$U(x) = x - \alpha x^2, \quad \alpha > 0$$

$\Rightarrow$ Attention, cette fonction n'est pas monotone



LES FONCTIONS TYPES

- Utilité de type **Hyperbolic Absolute Risk Aversion (HARA)**

$$U(x) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{x-\theta}{\gamma}\right)^{1-\gamma}, \quad \frac{x-\theta}{\gamma} > 0$$

$\Rightarrow$ On obtient alors $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{\gamma}{x-\theta}$ car

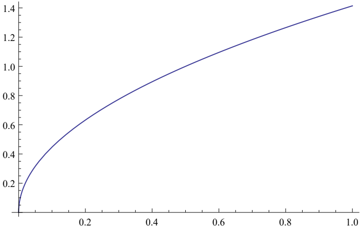
LES FONCTIONS TYPES

- Utilité de type **Hyperbolic Absolute Risk Aversion (HARA)**

$$U(x) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{x-\theta}{\gamma}\right)^{1-\gamma}, \quad \frac{x-\theta}{\gamma} > 0$$

$\Rightarrow$ On obtient alors $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{\gamma}{x-\theta}$ car

$$-\left(\frac{x-\theta}{\gamma}\right)^{-1-\gamma} / \left(\frac{x-\theta}{\gamma}\right)^{-\gamma} = -\frac{\gamma}{x-\theta}$$



- $\theta = 0$ donne CRRA || $\theta = 0$ et $\gamma = 1$ tend vers la CRRA logarithmique
- $\theta \to -\infty$ tend vers la CARA || $\theta = 0$ et $\gamma = -1$ donne la quadratique

PLAN

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Soit un individu u disposant d'une richesse certaine W_0 et risquée $\tilde{\varepsilon}$
  - u désire assurer $\tilde{\varepsilon}$ pour une valeur ν contre un éventuel sinistre
  - le coût de l'assurance est une prime d'un montant $\beta\nu$ avec $0 < \beta \leq 1$
  - le sinistre survient avec une proba de p
- Soit un assureur a percevant la prime $\beta\nu$ et payant des coûts fixes c
  - en cas de sinistre, a doit dédommager u pour un montant ν
  - en cas de sinistre, a obtient $\beta\nu - \nu - c$
  - en absence de sinistre, a obtient $\beta\nu - c$

  $\Rightarrow$ on suppose $\beta\nu - c > 0$ pour que a puisse dégager un profit

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Formalisez les loteries de l'assuré et de l'assureur
- Calculer l'espérance de ces loteries
- Quel est le montant assuré ν qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré ?
- Quel est le montant assuré ν qui maximise le critère de l'espérance de l'assureur ?
- Pourquoi le critère de l'espérance n'est-il pas approprié ?

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Formalisez les loteries de l’assuré et de l’assureur
  - concernant l’assuré on trouve :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Formalisez les loteries de l'assuré et de l'assureur
  - concernant l'assuré on trouve :

$$\tilde{W} = \begin{cases} W_0 + (1-\beta)\nu \text{ avec une proba de } p \\ W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu \text{ avec une proba de } 1-p \end{cases}$$

  - concernant l'assureur on trouve :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Formalisez les loteries de l'assuré et de l'assureur
  - concernant l'assuré on trouve :

$$\tilde{W} = \begin{cases} W_0 + (1-\beta)\nu \text{ avec une proba de } p \\ W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu \text{ avec une proba de } 1-p \end{cases}$$

  - concernant l'assureur on trouve :

$$\tilde{\Pi} = \begin{cases} (\beta-1)\nu - c \text{ avec une proba de } p \\ \beta\nu - c \text{ avec une proba de } 1-p \end{cases}$$

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Calculer l'espérance de ces loteries
  - concernant l'assuré on trouve :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Calculer l'espérance de ces loteries
  - concernant l'assuré on trouve :

$$\begin{aligned} E(\tilde{W}) &= p\big(W_0 + (1-\beta)\nu\big) + (1-p)\big(W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu\big) \\ &= W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu \end{aligned}$$

  - concernant l'assureur on trouve :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Calculer l'espérance de ces loteries
  - concernant l'assuré on trouve :

$$
\begin{aligned}
E(\tilde{W}) &= p\big(W_0 + (1-\beta)\nu\big) + (1-p)\big(W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu\big) \\
&= W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu
\end{aligned}
$$

  - concernant l'assureur on trouve :

$$
\begin{aligned}
E(\tilde{W}) &= p\big((\beta-1)\nu - c\big) + (1-p)\big(\beta\nu - c\big) \\
&= (\beta-p)\nu - c
\end{aligned}
$$

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Quel est le montant assuré ν qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?
  - concernant l'assuré on a :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Quel est le montant assuré ν qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?
  - concernant l'assuré on a :

$$\max_{0\leq\nu\leq\tilde{\varepsilon}} \mathbb{E}[\tilde{W}(\nu)] = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu$$

  - comme $\mathbb{E}[.]$ dépend linéairement de ν, l'analyse de $\partial\mathbb{E}[.]/\partial\nu$ est simple

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Quel est le montant assuré ν qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?
  - concernant l'assuré on a :

$$\max_{0\leq\nu\leq\tilde{\varepsilon}} \mathbb{E}[\tilde{W}(\nu)] = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu$$

  - comme $\mathbb{E}[.]$ dépend linéairement de ν, l'analyse de $\partial\mathbb{E}[.]/\partial\nu$ est simple
    - si $p < \beta$, $\partial\mathbb{E}[.]/\partial\nu < 0$ et la demande d'assurance est $\nu = 0$
    - si $p = \beta$, $\partial\mathbb{E}[.]/\partial\nu = 0$ et la demande d'assurance est $\nu \in [0, \tilde{\varepsilon}]$
    - si $p > \beta$, $\partial\mathbb{E}[.]/\partial\nu > 0$ et la demande d'assurance est $\nu = \tilde{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ L'individu u a donc intérêt à s'assurer si $p > \beta$ pour un montant $\nu = \tilde{\varepsilon}$

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Quel est le montant assuré ν qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?
    - concernant l'assureur on a :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Quel est le montant assuré ν qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?
  - concernant l'assureur on a :

$$\max_{0\leq\nu\leq\tilde{\varepsilon}} \mathbb{E}[\tilde{\Pi}(\nu)] = (\beta - p)\nu - c$$

  - comme $\mathbb{E}[.]$ dépend linéairement de ν, l'analyse de $\partial\mathbb{E}[.]/\partial\nu$ est simple

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE

- Quel est le montant assuré ν qui maximise le critère de l'espérance de l'assuré puis de l'assureur ?
  - concernant l'assureur on a :

$$\max_{0 \leq \nu \leq \tilde{\varepsilon}} \mathbb{E}[\tilde{\Pi}(\nu)] = (\beta - p)\nu - c$$

  - comme $\mathbb{E}[.]$ dépend linéairement de ν, l'analyse de $\partial\mathbb{E}[.]/\partial\nu$ est simple
    - si $p < \beta$, $\mathbb{E}[.] > 0$ si

$$(\beta - p)\nu - c > 0$$

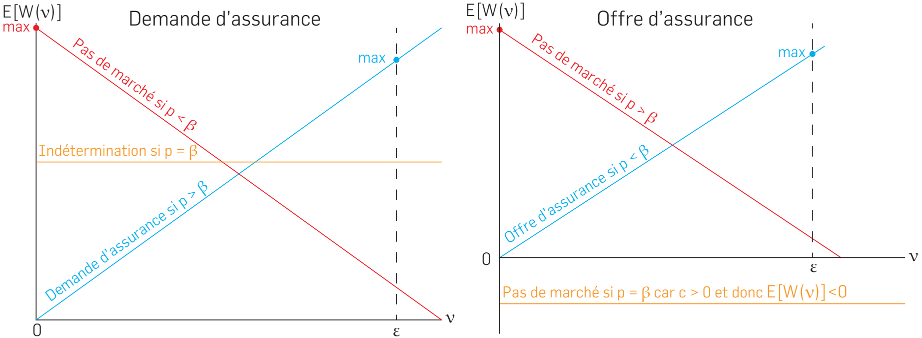
      et l'offre d'assurance est $\nu = \tilde{\varepsilon}$
    - si $p = \beta$, $\mathbb{E}[.] < 0$ car $c > 0$ et l'offre d'assurance est $\nu = 0$
    - si $p > \beta$, $\partial\mathbb{E}[.]/\partial\nu < 0$ et l'offre d'assurance est $\nu = 0$

  $\Rightarrow$ L'assureur a a donc intérêt à assurer uniquement si $p < \beta$ pour un montant $\nu = \tilde{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Le critère $\mathbb{E}[.]$ ne permet donc pas d'établir un marché de l'assurance

  - les conditions de l'offreur ne croisent jamais celles du demandeur d'assurance

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE



- Ce résultat confirme que le critère $\mathbb{E}[\tilde{W}]$ n'est pas un bon critère
- Exercice de réflexion personnel : le critère $\mathbb{E}[U(\tilde{W})]$ résout-il le paradoxe ?

LE CRITÈRE ESPÉRANCE-VARIANCE

- Outre le critère d'utilité espérée, le **critère espérance-variance (MV)** est également très utilisé

- Le critère MV associe au risque, la variance de $\tilde{W}$, notée $\mathbb{V}(\tilde{W})$
  $\Rightarrow$ la variance caractérise la dispersion d'une distribution autour de son espérance

$\Rightarrow$ Une décision d dans le set des décisions $\mathscr{D}$ menant à un gain aléatoire $\tilde{W}(d)$ sera alors donnée par la solution du programme

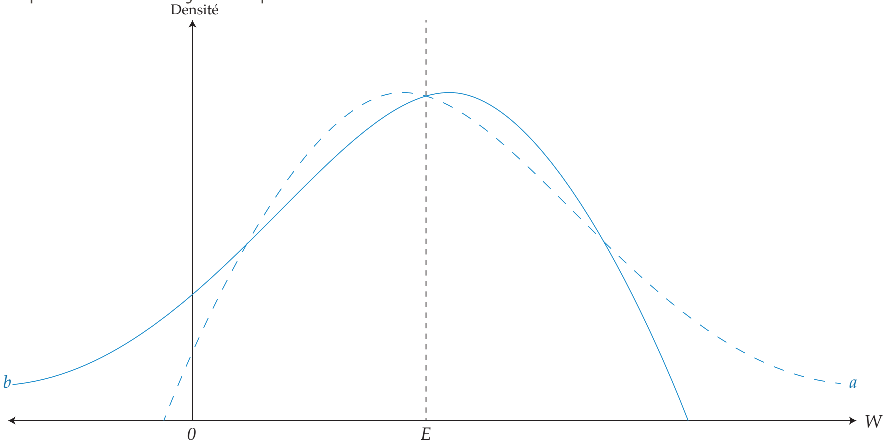
$$\max_{d \in \mathscr{D}} f\left(\mathbb{E}[\tilde{W}(d)], \mathbb{V}[\tilde{W}(d)]\right)$$

- On supposera

$$\frac{\partial f(.)}{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}(d)]} > 0, \quad \frac{\partial f(.)}{\partial \mathbb{V}[\tilde{W}(d)]} < 0$$

LES LIMITES DU CRITÈRE ESPÉRANCE-VARIANCE

- Ce critère impose une même sensibilité au risque de gain et de perte
- Il s'applique donc pour des lois de distribution de la richesse symétriques et échoue pour des lois asymétriques



LES LIMITES DU CRITÈRE ESPÉRANCE-VARIANCE

- Pour pallier à ce problème il faudrait tenir compte de l'asymétrie de la distribution

  ⇒ i.e. tenir compte de la positivité du **skewness**

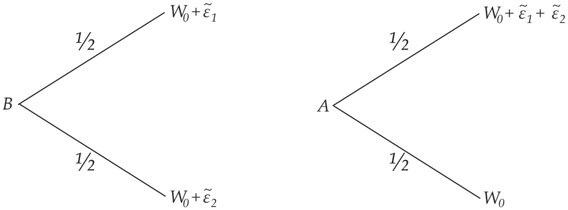
  - on associe le **skewness** à la **prudence** de l'investisseur (aversion aux risques baissiers)

- Il est également possible de s'intéresser aux moments d'ordre plus élevés

  - e.g. on associe le **kurtosis** à la **tempérance** de l'investisseur

  ⇒ attitude vis-à-vis de la localisation de changements de risque à moyenne constante

  - pour l'investisseur tempérant, $B \succ A$ car cela évite une concentration des peines sur un état du monde (préférence pour la désagrégation des risques)



LES LIMITES DU CRITÈRE ESPÉRANCE-VARIANCE

- Néanmoins, nous ne considérerons ici que des agents qui
  - minimise le risque à espérance donnée :

$$\min_{d \in \mathscr{D}} \mathbb{V}[\tilde{W}(d)] \;\; s.c. \;\; \mathbb{E}[\tilde{W}(d)] = \mathbb{E}[\tilde{W}(d^*)]$$

  - maximise le rendement à variance donnée

$$\max_{d \in \mathscr{D}} \mathbb{E}[\tilde{W}(d)] \;\; s.c. \;\; \mathbb{V}[\tilde{W}(d)] = \mathbb{V}[\tilde{W}(d^*)]$$

avec d^* la décision solution du programme $\max f(.)$

ESPÉRANCE-VARIANCE ET UTILITÉ ESPÉRÉE

- Dans certains cas, le critère de l'UE revient à appliquer le critère EV
  $\Rightarrow$ dépend de la forme de l'utilité et de la distribution de $\tilde{W}$

- Cas de l'utilité quadratique : $U(W) = W - \alpha W^2$
  - Supposons $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 0$ donnée
  $\Rightarrow$ $\min \mathbb{E}(\tilde{W}^2) \equiv \min \mathbb{V}(\tilde{W})$ sous contrainte car

$$\max \left(\mathbb{E}(\tilde{W}) - \alpha \mathbb{E}(\tilde{W}^2)\right) \equiv \max \left(0 - \alpha \mathbb{E}(\tilde{W}^2)\right)$$

- Cas d'une distribution Normale : $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
  - La distribution de W est déterminée par les deux premiers moments
  $\Rightarrow$ Pour toute fonction d'utilité U, l'UE dépendra de deux paramètres :

$$\mathbb{E}[U(\tilde{W})] = f\left(\mathbb{E}(\tilde{W}), \mathbb{V}(\tilde{W})\right)$$

CRITÈRE EV ET UTILITÉ DE MARKOWITZ

- Soit un agent avec des préférences CARA : $U(\tilde{W}) = -\frac{1}{A}\exp(-A\,\tilde{W})$
- La richesse incertaine de l'individu est $\tilde{W} \sim \mathcal{N}(m, \sigma_W^2)$
  - $\Rightarrow$ rappelons que si $x \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\exp(x) = y \sim \log -\mathcal{N}(m, \sigma^2)$
  - $\Rightarrow$ rappelons que $e^{-Ax} = e^{-A\log(y)}$
  - $\Rightarrow$ rappelons que $\mathbb{E}(-A\log(y)) = -A\mathbb{E}(\log(y)) = -Am$
  - $\Rightarrow$ rappelons que $\mathbb{V}(-A\log(y)) = A^2\mathbb{V}(\log(y)) = A^2\sigma_W^2$
  - $\Rightarrow$ rappelons que $\mathbb{E}(y) = e^{m+\sigma^2/2}$
- Calculez l'utilité espérée de la richesse :

CRITÈRE EV ET UTILITÉ DE MARKOWITZ

- Soit un agent avec des préférences CARA : $U(\tilde{W}) = -\frac{1}{A}\exp(-A\tilde{W})$

- La richesse incertaine de l'individu est $\tilde{W} \sim \mathcal{N}(m, \sigma_W^2)$

  $\Rightarrow$ rappelons que si $x \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\exp(x) = y \sim \log -\mathcal{N}(m, \sigma^2)$
  $\Rightarrow$ rappelons que $e^{-Ax} = e^{-A\log(y)}$
  $\Rightarrow$ rappelons que $\mathbb{E}(-A\log(y)) = -A\mathbb{E}(\log(y)) = -Am$
  $\Rightarrow$ rappelons que $\mathbb{V}(-A\log(y)) = A^2\mathbb{V}(\log(y)) = A^2\sigma_W^2$
  $\Rightarrow$ rappelons que $\mathbb{E}(y) = e^{m+\sigma^2/2}$

- Calculez l'utilité espérée de la richesse :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U(\tilde{W})) &= \mathbb{E}(-\frac{1}{A}\exp(-A\tilde{W})) \\
&= -\frac{1}{A}\mathbb{E}(\exp(-A\tilde{W})) \\
&= -\frac{1}{A}e^{-Am+A^2\sigma_W^2/2} = -\frac{1}{A}e^{-A(m-A\sigma_W^2/2)}
\end{aligned}$$

CRITÈRE EV ET UTILITÉ DE MARKOWITZ

- Comme il s'agit d'une fonction monotone croissante, toute transformation croissante préservera les préfèrences

⇒ Laissons de côté le terme en dehors de l'espérance et considérons ici la fonction réciproque, $g^{-1}(.)$ tel que :

CRITÈRE EV ET UTILITÉ DE MARKOWITZ

- Comme il s'agit d'une fonction monotone croissante, toute transformation croissante préservera les préférences

⇒ Laissons de côté le terme en dehors de l'espérance et considérons ici la fonction réciproque, $g^{-1}(.)$ tel que :

$$\begin{aligned} g^{-1}(\mathbb{E}(U(\tilde{W}))) &= -A\Big(\mathbb{E}(\tilde{W}) - \frac{A}{2}\mathbb{V}(\tilde{W})\Big) \\ &= -A \times f\left(\mathbb{E}(\tilde{W}), \mathbb{V}(\tilde{W})\right) \end{aligned}$$

⇒ On voit ainsi qu'en présence d'une richesse normalement distribuée, le critère de l'utilité espérée revient à utiliser le critère EV

L'UTILITÉ DE MARKOWITZ

- Dans la pratique, la forme fonctionnelle du critère EV est la suivante :

$$U_M(\tilde{W}) = f\left(\mathbb{E}[\tilde{W}(d)], \mathbb{V}[\tilde{W}(d)]\right) = \mathbb{E}(\tilde{W}) - k\mathbb{V}(\tilde{W})$$

avec k un coefficient reflétant l'aversion au risque

$\Rightarrow$ On parle d'utilité de Markowitz

- Pour $k > 0$, $U_M(\tilde{W})$ reflète l'aversion au risque
- Pour $k = 0$, $U_M(\tilde{W})$ devient le critère d'espérance (risque-neutre)
- Pour $k < 0$, $U_M(\tilde{W})$ reflète le goût pour le risque

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Repartons des loteries
  - concernant l'assuré on avait :

$$\tilde{W} = \begin{cases} W_0 + (1-\beta)\nu & \text{avec une proba de } p \\ W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu & \text{avec une proba de } 1-p \end{cases}$$

⇒ concernant l'espérance, on avait $E(\tilde{W}) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu$

⇒ Calculez la variance pour l'assuré (voir rappel de stats)

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Repartons des loteries
  - concernant l'assuré on avait :

$$\tilde{W} = \begin{cases} W_0 + (1-\beta)\nu & \text{avec une proba de } p \\ W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu & \text{avec une proba de } 1-p \end{cases}$$

$\Rightarrow$ concernant l'espérance, on avait $E(\tilde{W}) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu$

$\Rightarrow$ Calculez la variance pour l'assuré (voir rappel de stats)

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\tilde{W}] &= p\Big(W_0 + (1-\beta)\nu - \big(W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu\big)\Big)^2 \\ &+ (1-p)\Big(W_0 + \tilde{\varepsilon} - \beta\nu - \big(W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu\big)\Big)^2 \\ &= p(1-p)(\tilde{\varepsilon}-\nu)^2 \end{aligned}$$

car

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - \mathbb{E}(X)\big)^k \Pr(X = x_i)$$

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Interprétez $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon}-\nu)^2$

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Interprétez $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2$
  - le risque croît avec $(\tilde{\varepsilon} - \nu)$

  $\Rightarrow$ Moins on s'assure, plus le risque est élevé

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Interprétez $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)^2$
  - le risque croît avec $(\tilde{\varepsilon} - \nu)$

  $\Rightarrow$ Moins on s'assure, plus le risque est élevé
  - le risque est également fonction de $p(1-p)$ qui est quadratique

  $\Rightarrow$ $p(1-p)$ atteint son maximum en $p = 1/2$: incertitude maximale
- Étudiez l'utilité de Markowitz sous l'hypothèse $p < \beta$

  $\Rightarrow$ Côté assureur, cette hypothèse garantit un profit > 0

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Interprétez $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon}-\nu)^2$
  - le risque croît avec $(\tilde{\varepsilon}-\nu)$

  $\Rightarrow$ Moins on s'assure, plus le risque est élevé
  - le risque est également fonction de $p(1-p)$ qui est quadratique

  $\Rightarrow$ $p(1-p)$ atteint son maximum en $p = 1/2$: incertitude maximale
- Étudiez l'utilité de Markowitz sous l'hypothèse $p < \beta$

  $\Rightarrow$ Côté assureur, cette hypothèse garantit un profit > 0

$$U_M(\tilde{W}) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu - kp(1-p)(\tilde{\varepsilon}-\nu)^2$$

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Interprétez $\mathbb{V}[\tilde{W}] = p(1-p)(\tilde{\varepsilon}-\nu)^2$

    - le risque croît avec $(\tilde{\varepsilon}-\nu)$

  $\Rightarrow$ Moins on s'assure, plus le risque est élevé

    - le risque est également fonction de $p(1-p)$ qui est quadratique

  $\Rightarrow$ $p(1-p)$ atteint son maximum en $p = 1/2$: incertitude maximale

- Étudiez l'utilité de Markowitz sous l'hypothèse $p < \beta$

  $\Rightarrow$ Côté assureur, cette hypothèse garantit un profit > 0

$$U_M(\tilde{W}) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\nu - kp(1-p)(\tilde{\varepsilon}-\nu)^2$$

    - lorsque l'assuré aime le risque : $k < 0$
    - lorsque l'assuré est neutre face au risque : $k = 0$
    - lorsque l'assuré est averse au risque : $k > 0$

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si $k < 0$, U_M est convexe en ν
  - Si $\nu = 0$ on obtient :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si $k < 0$, U_M est convexe en ν
  - Si $\nu = 0$ on obtient :

$$U_M(\nu = 0) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} - kp(1-p)\tilde{\varepsilon}^2$$

  - Si $\nu = \tilde{\varepsilon}$ on obtient :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si $k < 0$, U_M est convexe en ν
  - Si $\nu = 0$ on obtient :
  $$U_M(\nu = 0) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} - kp(1-p)\tilde{\varepsilon}^2$$
  - Si $\nu = \tilde{\varepsilon}$ on obtient :
  $$U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\tilde{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ La différence des deux montre que $U_M(.)$ atteint son max en $\nu = 0$

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si $k < 0$, U_M est convexe en ν
  - Si $\nu = 0$ on obtient :

$$U_M(\nu = 0) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} - kp(1-p)\tilde{\varepsilon}^2$$

  - Si $\nu = \tilde{\varepsilon}$ on obtient :

$$U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\tilde{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ La différence des deux montre que $U_M(.)$ atteint son max en $\nu = 0$

$$U_M(\nu = 0) - U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = -kp(1-p)\tilde{\varepsilon}^2 - (p-\beta)\tilde{\varepsilon} > 0$$

$\Rightarrow$ **Conclusion :** l'individu qui aime le risque ne s'assure pas

- Si $k = 0$, le critère est celui de l'espérance étudié précédemment

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si $k < 0$, U_M est convexe en ν
  - Si $\nu = 0$ on obtient :

$$U_M(\nu = 0) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} - kp(1-p)\tilde{\varepsilon}^2$$

  - Si $\nu = \tilde{\varepsilon}$ on obtient :

$$U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = W_0 + (1-p)\tilde{\varepsilon} + (p-\beta)\tilde{\varepsilon}$$

  $\Rightarrow$ La différence des deux montre que $U_M(.)$ atteint son max en $\nu = 0$

$$U_M(\nu = 0) - U_M(\nu = \tilde{\varepsilon}) = -kp(1-p)\tilde{\varepsilon}^2 - (p-\beta)\tilde{\varepsilon} > 0$$

$\Rightarrow$ **Conclusion :** l'individu qui aime le risque ne s'assure pas

- Si $k = 0$, le critère est celui de l'espérance étudié précédemment

$\Rightarrow$ **Conclusion :** pas de marché de l'assurance dans ce cas

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si $k > 0$, étudions les FOC et les SOC pour trouver la solution
  - La FOC nous donne :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si $k > 0$, étudions les FOC et les SOC pour trouver la solution
  - La FOC nous donne :
$$\frac{\partial U_M}{\partial \nu} = p - \beta + 2kp(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)$$
  - La SOC nous donne :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Si $k > 0$, étudions les FOC et les SOC pour trouver la solution
  - La FOC nous donne :
$$\frac{\partial U_M}{\partial \nu} = p - \beta + 2kp(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)$$
  - La SOC nous donne :
$$\frac{\partial^2 U_M}{\partial \nu^2} = -2kp(1-p)$$

$\Rightarrow$ U_M est concave en ν (car $\frac{\partial^2 U_M}{\partial \nu^2} < 0$) et admet donc un maximum

- En annulant la FOC on trouve :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

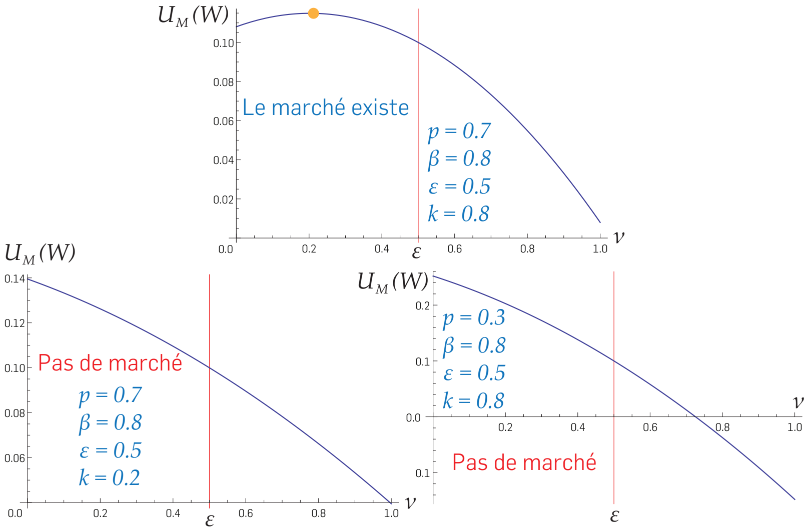
- Si $k > 0$, étudions les FOC et les SOC pour trouver la solution
  - La FOC nous donne :
$$\frac{\partial U_M}{\partial \nu} = p - \beta + 2kp(1-p)(\tilde{\varepsilon} - \nu)$$
  - La SOC nous donne :
$$\frac{\partial^2 U_M}{\partial \nu^2} = -2kp(1-p)$$

$\Rightarrow$ U_M est concave en ν (car $\frac{\partial^2 U_M}{\partial \nu^2} < 0$) et admet donc un maximum

- En annulant la FOC on trouve :
$$\frac{\partial U_M}{\partial \nu} = 0 \Rightarrow \nu^* = \tilde{\varepsilon} - \frac{\beta - p}{2kp(1-p)}$$

$\Rightarrow$ **Conclusion :** avec $k \gg 0$ et $0 \ll p < \beta$ on a $\nu^* \in [0, \tilde{\varepsilon}]$ et il existe bien un marché de l'assurance

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE



LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Discutez la sensibilité de ν^* aux paramètres k, β et p

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Discutez la sensibilité de ν^* aux paramètres k, β et p
  - Quand l'aversion au risque augmente, ν^* augmente mais $\nu^* = \tilde{\varepsilon}$ uniquement pour $k \to \infty$

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Discutez la sensibilité de ν^* aux paramètres k, β et p
  - Quand l'aversion au risque augmente, ν^* augmente mais $\nu^* = \tilde{\varepsilon}$ uniquement pour $k \to \infty$
  - Quand la prime d'assurance augmente, ν^* diminue ce qui semble logique : plus s'assurer est coûteux, moins on s'assure

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Discutez la sensibilité de ν^* aux paramètres k, β et p
  - Quand l'aversion au risque augmente, ν^* augmente mais $\nu^* = \tilde{\varepsilon}$ uniquement pour $k \to \infty$
  - Quand la prime d'assurance augmente, ν^* diminue ce qui semble logique : plus s'assurer est coûteux, moins on s'assure
  - L'effet de p est plus complexe donc étudions la dérivée :

LE PARADOXE DE L'ASSURANCE ET LE CRITÈRE E-V

- Discutez la sensibilité de ν^* aux paramètres k, β et p
  - Quand l'aversion au risque augmente, ν^* augmente mais $\nu^* = \tilde{\varepsilon}$ uniquement pour $k \to \infty$
  - Quand la prime d'assurance augmente, ν^* diminue ce qui semble logique : plus s'assurer est coûteux, moins on s'assure
  - L'effet de p est plus complexe donc étudions la dérivée :

$$\frac{\partial \nu^*}{\partial p} = \frac{p^2 - 2\beta p + \beta}{2kp^2(1-p)^2} = \frac{(p-\beta)^2 + \beta(1-\beta)}{2kp^2(1-p)^2} > 0$$

$\Rightarrow$ Le résultat est intuitif : plus la probabilité de sinistre est élevée, plus le montant assuré est élevé

PLAN

LE PARADOXE D'ALLAIS

- Expérience démontrant que l'axiome d'indépendance est souvent violé
  - Les agents doivent choisir entre deux loteries : A et B

$$A = \begin{cases} 10000 \text{ avec une proba de } 100\% \\ 0 \text{ avec une proba de } 0\% \end{cases} \quad \text{et} \quad B = \begin{cases} 15000 \text{ avec une proba de } 90\% \\ 0 \text{ avec une proba de } 10\% \end{cases}$$

LE PARADOXE D'ALLAIS

- Expérience démontrant que l'axiome d'indépendance est souvent violé
  - Les agents doivent choisir entre deux loteries : A et B

$$A = \begin{cases} 10000 & \text{avec une proba de } 100\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 0\% \end{cases} \quad \text{et} \quad B = \begin{cases} 15000 & \text{avec une proba de } 90\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 10\% \end{cases}$$

  - La plupart des agents optent pour la loterie A... puis ils doivent choisir entre

$$C = \begin{cases} 10000 & \text{avec une proba de } 10\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 90\% \end{cases} \quad \text{et} \quad D = \begin{cases} 15000 & \text{avec une proba de } 9\% \\ 0 & \text{avec une proba de } 91\% \end{cases}$$

LE PARADOXE D'ALLAIS

- Expérience démontrant que l'axiome d'indépendance est souvent violé
  - Les agents doivent choisir entre deux loteries : A et B

$$A = \left\{ \begin{array}{c} 10000 \text{ avec une proba de } 100\% \\ 0 \text{ avec une proba de } 0\% \end{array} \right. \quad \text{et} \quad B = \left\{ \begin{array}{c} 15000 \text{ avec une proba de } 90\% \\ 0 \text{ avec une proba de } 10\% \end{array} \right.$$

  - La plupart des agents optent pour la loterie A... puis ils doivent choisir entre

$$C = \left\{ \begin{array}{c} 10000 \text{ avec une proba de } 10\% \\ 0 \text{ avec une proba de } 90\% \end{array} \right. \quad \text{et} \quad D = \left\{ \begin{array}{c} 15000 \text{ avec une proba de } 9\% \\ 0 \text{ avec une proba de } 91\% \end{array} \right.$$

  - Les agents pour qui $A \succ B$ optent généralement pour D... pourtant :

$$C = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ avec une proba de } 10\% \\ Z \text{ avec une proba de } 90\% \end{array} \right. \quad \text{et} \quad D = \left\{ \begin{array}{c} B \text{ avec une proba de } 10\% \\ Z \text{ avec une proba de } 90\% \end{array} \right.$$

    où Z est la loterie 0 qui rapporte 0 avec une probabilité de 100%

  - Or selon l'axiome d'indépendance, si $A \succ B$ alors $C \succ D$ car les procédures d'attribution des lots ne devrait pas compter

PLAN

LE PORTEFEUILLE

- Quittons le marché de l'assurance pour les marchés financiers

- Suppons un investisseur cherchant à investir dans plusieurs titres
  - Cela conduit l'agent à composer un portefeuille

- Pour simplifier on considérera que l'agent
  - acquiert les titres en $t = 0$ pour une valeur de portefeuille de P_0
  - s'intéresse à la valeur terminale du portefeuille P_1 en $t = 1$
  - P_1 comprend éventuellement des dividendes

- Dès lors, le taux de rentabilité du portefeuille sera donné par

$$R = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

LES POSITIONS DE L'INVESTISSEUR

- Deux positions possibles : position longue (achat) ou courte (vente)
- Cas d'une position longue
  - achat de titres en $t = 0$ et menant à un patrimoine P_1 en $t = 1$

  $\Rightarrow$ séquence de flux de $-P_0, +P_1 = R$
- Cas d'une position courte
  - vente ou émission de titres en $t = 0$ et menant à $-P_1$ en $t = 1$

  $\Rightarrow$ séquence de flux de $+P_0, -P_1 = R$
  - Pourquoi $-P_1$?
    - **vente à découvert :** vente en $t = 0$ d'un titre que l'on possède pas et qu'on emprunte pour la période et qui sera rendu en $t = 1$ après achat
    - **émission du titre :** le titre est émis au prix P_0 impliquant en $t = 1$ une valeur de marché pour cette dette de P_1
    - **vente simple :** vente en $t = 0$ d'un titre que l'on possède et impliquant une valeur manquante au portefeuille de P_1 en $t = 1$

LE PORTEFEUILLE EFFICIENT

- A l'aide du critère Espérance-Variance, on peut définir un **portefeuille efficient**
- La notion de portefeuille efficient est introduite par **Markowitz**
  - Un portefeuille efficient est un portefeuille caractérisé par
    - une **variance minimum** des rendements à espérance de rentabilité donnée
  - **Markowitz** considère la variance comme une mesure du risque
    - nous utiliserons plutôt **l'écart type** car c'est **une mesure cohérente** du risque

    p.s. la variance est en faite une mesure non-cohérente du risque
- Le cas le plus simple est celui d'un portefeuille contenant deux titres
  - Titre A : rentabilité aléatoire R_A d'espérance μ_A et de variance σ_A^2
  - Titre B : rentabilité aléatoire R_B d'espérance μ_B et de variance σ_B^2
  - La covariance des rentabilités est donnée par $\sigma_{AB} = \text{cov}(R_A, R_B)$

LE PORTEFEUILLE À DEUX TITRES

- La composition du portefeuille nécessite l'investissement d'une somme S (normalisons à 1€ pour simplifier) dans les titres A et B

- La fraction de l'euro investie dans A est de x ($1 - x$ pour B)

- Avec R_p la rentabilité du portefeuille, la valeur de ce dernier est donc

$$1 + R_p = x(1 + R_A) + (1 - x)(1 + R_B) = 1 + xR_A + (1 - x)R_B$$

- On voit alors immédiatement que $R_p = xR_A + (1 - x)R_B$

- On en déduit alors
  - $\mu_p = x\mu_A + (1 - x)\mu_B$
  - $\sigma_p^2 = x^2\sigma_A^2 + (1 - x)^2\sigma_B^2 + 2x(1 - x)\sigma_{AB}$
    - car

$$\mathbb{V}\Big(\sum_i X_i\Big) = \sum_i \sum_j Cov(X_i, X_j) = \sum_k \mathbb{V}\Big(X_k\Big) + 2\sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$$

EXEMPLE DE PORTEFEUILLE À DEUX TITRES

- Soit un portefeuille P composé a 2/3 d'un actif A et 1/3 d'un actif B
  - soit une rentabilité espérée de 12% pour A et de 18% pour B
  - soit $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$ et $\rho_{AB} = 0.5$ (corrélation de Pearson)
- Quelle est l'espérance et l'écart type du portefeuille ?

EXEMPLE DE PORTEFEUILLE À DEUX TITRES

- Soit un portefeuille P composé a 2/3 d'un actif A et 1/3 d'un actif B
  - soit une rentabilité espérée de 12% pour A et de 18% pour B
  - soit $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$ et $\rho_{AB} = 0.5$ (corrélation de Pearson)
- Quelle est l'espérance et l'écart type du portefeuille ?
  - $\mu_P = (2/3 \times 0.12) + (1/3 \times 0.18) = 14\%$
  - D'après la formule de ρ_{AB}, on sait que $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0.08 \Rightarrow$

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times (0.4)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (0.4)^2 + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 0.08 = 0.12444$$

  - On a donc $\sigma_P = 0.353$
- Qu'observez-vous ?

EXEMPLE DE PORTEFEUILLE À DEUX TITRES

- Soit un portefeuille P composé a 2/3 d'un actif A et 1/3 d'un actif B
  - soit une rentabilité espérée de 12% pour A et de 18% pour B
  - soit $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$ et $\rho_{AB} = 0.5$ (corrélation de Pearson)
- Quelle est l'espérance et l'écart type du portefeuille ?
  - $\mu_P = (2/3 \times 0.12) + (1/3 \times 0.18) = 14\%$
  - D'après la formule de ρ_{AB}, on sait que $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0.08 \Rightarrow$

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times (0.4)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (0.4)^2 + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 0.08 = 0.12444$$

  - On a donc $\sigma_P = 0.353$
- Qu'observez-vous ?
  - $\sigma_P \leq \min(\sigma_A, \sigma_B)$

$\Rightarrow$ cette réduction du risque est le fruit de la **diversification**
$\Rightarrow$ mathématiquement c'est possible car l'écart-type est sous-additif
$\Rightarrow$ en finance, on parle de **volatilité** plutôt que d'écart-type

VARIANCE COMME MESURE RISQUE ?

- Soit deux variables aléatoires A et B avec $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$ et $\rho_{AB} = 0.5$
- Quelle est l'écart type de $P = A + B$?

VARIANCE COMME MESURE RISQUE ?

- Soit deux variables aléatoires A et B avec $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$ et $\rho_{AB} = 0.5$
- Quelle est l'écart type de $P = A + B$?
  - $\sigma_P = 0.69282 \leq \sigma_A + \sigma_B = 0.8$

  $\Rightarrow$ la **volatilité** est sous-additive
- Quelle est la variance de $P = A + B$?

VARIANCE COMME MESURE RISQUE ?

- Soit deux variables aléatoires A et B avec $\sigma_A = \sigma_B = 40\%$ et $\rho_{AB} = 0.5$
- Quelle est l'écart type de $P = A + B$?
  - $\sigma_P = 0.69282 \leq \sigma_A + \sigma_B = 0.8$
  $\Rightarrow$ la **volatilité** est sous-additive
- Quelle est la variance de $P = A + B$?
  - $\sigma_P^2 = (0.4)^2 + (0.4)^2 + 2 \times 0.08 = 0.48 \geq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 = 0.32$
  $\Rightarrow$ la variance est super-additive
  - Une mesure du risque super-additive n'est pas une bonne mesure

VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

- Pourquoi σ_P^2 super-additive et σ_P ne l'est pas ?

VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

- Pourquoi σ_P^2 super-additive et σ_P ne l'est pas ?
  - pour la variance : $\mathbb{V}(A+B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A,B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$

VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

- Pourquoi σ_P^2 super-additive et σ_P ne l'est pas ?
  - pour la variance : $\mathbb{V}(A+B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A,B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$
  - pour l'écart type repartons de $\mathbb{V}(A+B) = \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$

VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

- Pourquoi σ_P^2 super-additive et σ_P ne l'est pas ?
  - pour la variance : $\mathbb{V}(A+B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A,B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$
  - pour l'écart type repartons de $\mathbb{V}(A+B) = \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$

$\Rightarrow$ on voit que $\mathbb{V}(A+B)$ est maximal pour $\rho = 1$ et donc

$$\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B$$

VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

- Pourquoi σ_P^2 super-additive et σ_P ne l'est pas ?
  - pour la variance : $\mathbb{V}(A+B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A,B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$
  - pour l'écart type repartons de $\mathbb{V}(A+B) = \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$

$\Rightarrow$ on voit que $\mathbb{V}(A+B)$ est maximal pour $\rho = 1$ et donc

$$\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B$$

$\Rightarrow$ par l'identité remarquable $(a+b)^2$ il vient que

$$\sigma_{A+B}^2 \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B = (\sigma_A + \sigma_B)^2$$

VARIANCE V.S. VOLATILITÉ

- Pourquoi σ_P^2 super-additive et σ_P ne l'est pas ?
  - pour la variance : $\mathbb{V}(A+B) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B) + 2Cov(A,B) \geq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$
  - pour l'écart type repartons de $\mathbb{V}(A+B) = \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$

  $\Rightarrow$ on voit que $\mathbb{V}(A+B)$ est maximal pour $\rho = 1$ et donc

  $$\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B$$

  $\Rightarrow$ par l'identité remarquable $(a+b)^2$ il vient que

  $$\sigma_{A+B}^2 \leq \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B = (\sigma_A + \sigma_B)^2$$

  $\Rightarrow$ grâce à la fonction racine on obtient alors

  $$\sqrt{\sigma_{A+B}^2} \leq \sqrt{(\sigma_A + \sigma_B)^2} \Longleftrightarrow \sigma_{A+B} \leq \sigma_A + \sigma_B \qquad (2)$$

  $\Rightarrow$ l'écart-type est bien une mesure sous-additive

- Cette seul propriété ne suffit pas à définir une bonne mesure du risque
  - il existe un axiomatique du risque qui dépasse les limites du cours

PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Dans l'exercice précédent, x était fixé ($x = 2/3$)
  - $\Rightarrow$ Le portefeuille $P(x = 2/3)$ en résultant donnait : $\mu_P = 14\%$ pour un risque $\sigma_P = 0.353$

- La question qui compte pour notre investisseur est alors la suivante :

$\Rightarrow$ Existe-t-il un portefeuille $P(x = x^*)$ avec x^* tel que
  - $\mu_P^* > \mu_P$
  - $\sigma_P^* < \sigma_P$

- Plus généralement, la question du portefeuille efficient est la suivante

$\Rightarrow$ Existe-t-il un portefeuille optimal au sens de l'utilité de Markowitz

$$\max_{x \in \mathscr{X}} f\left(\mathbb{E}[P(x)], \mathbb{V}[P(x)]\right), \quad \frac{\partial f(.)}{\partial \mathbb{E}[P(x)]} > 0, \quad \frac{\partial f(.)}{\partial \mathbb{V}[P(x)]} < 0$$

REPRÉSENTATION DES PORTEFEUILLES

- Il est possible de représenter le problème du portefeuille efficient graphiquement

- On sait que l'agent cherche à
  - minimiser le risque à espérance donnée :

$$\min_{d \in \mathscr{D}} \mathbb{V}[\tilde{W}(d)] \;\; s.c. \;\; \mathbb{E}[\tilde{W}(d)] = \mathbb{E}[\tilde{W}(d^*)]$$

  - maximiser le rendement à variance donnée

$$\max_{d \in \mathscr{D}} \mathbb{E}[\tilde{W}(d)] \;\; s.c. \;\; \mathbb{V}[\tilde{W}(d)] = \mathbb{V}[\tilde{W}(d^*)]$$

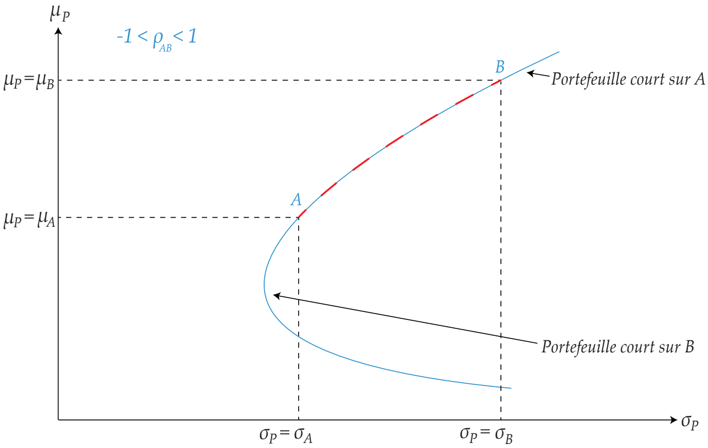
  avec d^* la décision solution du programme $\max f(.)$

- Faisons varier x dans les équations

$$\mu_p = x\mu_A + (1-x)\mu_B, \quad \sigma_p^2 = x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\sigma_{AB}$$

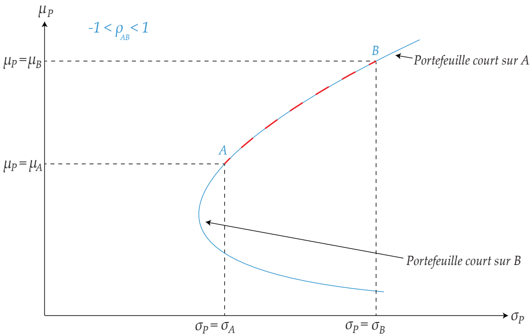
⇒ On obtient alors en ensemble de portefeuilles représentant les combinaisons possible d'actifs A et B

REPRÉSENTATION DES PORTEFEUILLES À DEUX TITRES



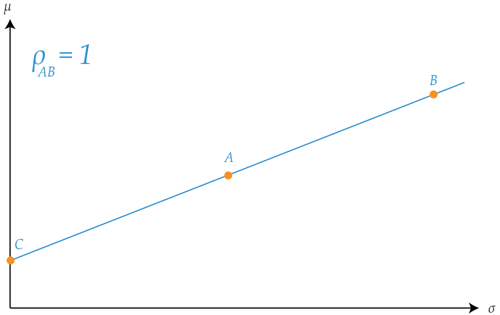
- A rentabilité (variance) donnée, tous les portefeuilles minimisant (maximisant) la variance (rentabilité) sont dits efficients

REPRÉSENTATION DES PORTEFEUILLES À DEUX TITRES



- Point A : portefeuille composé uniquement de l'actif A
- Point B : portefeuille composé uniquement de l'actif B
- A gauche de A : $1 - x < 0 \Rightarrow$ ventes à découvert de B
- A droite de B : $x < 0 \Rightarrow$ ventes à découvert de A
- Si ventes à découvert interdites : segment AB uniquement

PORTEFEUILLES À DEUX TITRES PARFAITEMENT CORRÉLÉS

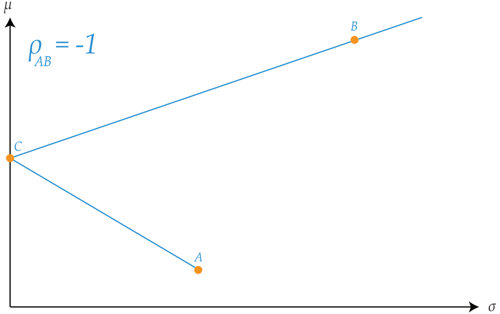


- Si $\rho_{AB} = 1$ la relation entre μ_p et σ_p est linéaire car (voir (2))

$$\mu_p = x\mu_A + (1-x)\mu_B, \quad \sigma_p = x\sigma_A + (1-x)\sigma_B$$

- Cette corrélation parfaite donne naissance au point C
  $\Rightarrow$ revient à prendre une position courte sur B $(1-x<0)$ tel que le risque est entièrement éliminé de P : au point C, $\sigma_P = 0$

DEUX TITRES PARFAITEMENT NÉGATIVEMENT CORRÉLÉS



- Si $\rho_{AB} = -1$, $\mu_p = x\mu_A + (1-x)\mu_B$ et $x = \sigma_B/(\sigma_A + \sigma_B)$ car

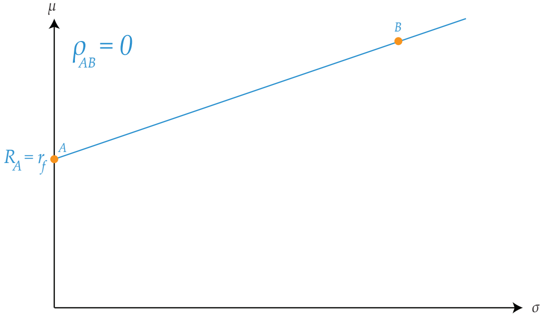
$$\sigma_p^2 = x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 - 2x(1-x)\sigma_A^2\sigma_B^2 = (x\sigma_A - (1-x)\sigma_B)^2$$

- Cette corrélation négative parfaite donne naissance au point C
  $\Rightarrow$ revient à prendre une position longue sur A et$B$ pour obtenir une diversification parfaite puisque le risque est entièrement éliminé

L'ACTIF SANS RISQUE

- Les meilleurs signatures ne sont pas exemptes à 100% de risque
- Cependant, la probabilité de faillite de certains états est relativement négligeable
  $\Rightarrow$ détenir des bons du trésors de ces états revient à détenir un **actif sans risque**
- L'actif sans risque produit une rentabilité certaine au **taux sans risque** noté r_f
- Le taux sans risque va représenter la base de la **rentabilité exigée** de tout titre financier
- La rentabilité exigée correspond en effet à r_f plus une prime de risque proportionnel au **risque systématique**
- Le risque systématique est le risque non diversifiable car corrélé au marché lui même

PORTEFEUILLES AVEC UN ACTIF SANS RISQUE

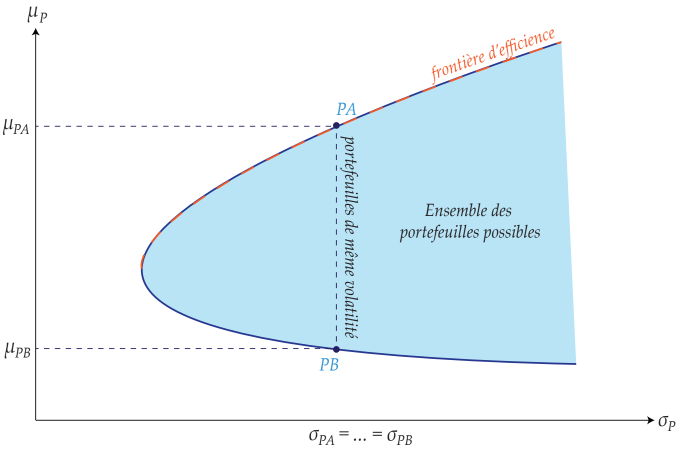


- Si l'actif A est sans risque, $\sigma_A = 0$ et donc $\rho_{AB} = 0$ et

$$\sigma_p^2 = (1 - x)^2 \sigma_B^2$$

LE PORTEFEUILLE À N TITRES SANS ACTIF SANS RISQUE

- La généralisation à N titres



PRINCIPE DE DIVERSIFICATION

- Soit P un portefeuille composé de N actifs alloués selon les poids $x_1, x_2, \cdots, x_N$ normalisés à 1

- La rentabilité du portefeuille est donc $R_P = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$

- Comme pour le portefeuille à 2 titres, le risque de P va dépendre
  - de la variance de l'actif i : σ_i
  - de la covariance avec le reste du portefeuille P : $cov(R_i, R_p)$

$\Rightarrow$ L'impacte de i sur P sera très différent selon le signe de $cov(R_i, R_p)$

  - si $cov(R_i, R_p) < 0$, les baisses (hausses) de P seront compensées par les hausses (baisses) de i

  - si $cov(R_i, R_p) > 0$, les baisses (hausses) de P seront accentuées par les baisses (hausses) de i

PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Existe-t-il un portefeuille optimal au sens de l'utilité de Markowitz

$$\max_{x\in\mathscr{X}} f\left(\mathbb{E}[P(x)], \mathbb{V}[P(x)]\right), \quad \frac{\partial f(.)}{\partial \mathbb{E}[P(x)]} > 0, \quad \frac{\partial f(.)}{\partial \mathbb{V}[P(x)]} < 0$$

$\Rightarrow$ Après l'analyse graphique passons à une analyse analytique

- repartons de P composé de 2 actifs : A et B en porportion x et $1-x$
- le rendement de P est donné : $R_p = xR_A + (1-x)R_B$

$\Rightarrow$ $\mu_p = \mathbb{E}(R_p) = x\mu_A + (1-x)\mu_B$

$\Rightarrow$ $\sigma_p^2 = \mathbb{E}(R_p^2) - \mathbb{E}(R_p)^2 = x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\sigma_{AB}$

- Pour quel x la variance de P est-elle minimale ?

PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Solution :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 0$$

- La dérivée nous donne

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 2x\sigma_A^2 + 2x\sigma_B^2 - 2\sigma_B^2 + 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB} - 4x\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}$$

- En annulant la dérivée on obtient alors :

$$x = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}$$

EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Soit une action A proposant de manière équiprobable $R_A = \{0\%, 5\%, 15\%, 40\%\}$
- Soit une action B proposant de manière équiprobable $R_B = \{30\%, 40\%, 0\%, -10\%\}$

- Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de chaque action

EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Soit une action A proposant de manière équiprobable $R_A = \{0\%, 5\%, 15\%, 40\%\}$
- Soit une action B proposant de manière équiprobable $R_B = \{30\%, 40\%, 0\%, -10\%\}$

- Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de chaque action

  - $\mu_A = \mathbb{E}(R_A) = \frac{1}{4}0\% + \frac{1}{4}5\% + \frac{1}{4}15\% + \frac{1}{4}40\% = 15\%$
  - $\mu_B = \mathbb{E}(R_B) = \frac{1}{4}30\% + \frac{1}{4}40\% + \frac{1}{4}0\% - \frac{1}{4}10\% = 15\%$

  - $\sigma_A^2 = \mathbb{V}(R_A) = \left(\frac{1}{4}0\%^2 + \frac{1}{4}5\%^2 + \frac{1}{4}15\%^2 + \frac{1}{4}40\%^2\right) - 15\%^2 = 0.02375\%$
  - $\sigma_B^2 = \mathbb{V}(R_B) = \left(\frac{1}{4}30\%^2 + \frac{1}{4}40\%^2 + \frac{1}{4}0\%^2 - \frac{1}{4}10\%^2\right) - 15\%^2 = 0.0425\%$

  - $\sigma_A = 0.1541$
  - $\sigma_B = 0.2062$

EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la covariance et la corrélation entre R_A et R_B
- Rappel :

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} x_i y_j \Pr(X = x_i || Y = y_j) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la covariance et la corrélation entre R_A et R_B
- Rappel :

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} x_i y_j \Pr(X = x_i || Y = y_j) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

  - $\sigma_{AB} = \frac{1}{4}\Big(0\% \times 30\% + 5\% \times 40\% + 15\% \times 0\% - 40\% \times 10\%\Big) - 15\%^2 = -0.0275$
  - $\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-0.0275}{0.1541 \times 0.2062} = -0.8656$

- Soit un portefeuille P équipondéré ($x = 0.5$) composé de A et B

$\Rightarrow$ Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de P

EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la covariance et la corrélation entre R_A et R_B
- Rappel :

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} x_i y_j \Pr(X = x_i || Y = y_j) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

  - $\sigma_{AB} = \frac{1}{4}\Big(0\% \times 30\% + 5\% \times 40\% + 15\% \times 0\% - 40\% \times 10\%\Big) - 15\%^2 = -0.0275$
  - $\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-0.0275}{0.1541 \times 0.2062} = -0.8656$

- Soit un portefeuille P équipondéré ($x = 0.5$) composé de A et B

$\Rightarrow$ Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de P

  - $\mu_P = \frac{1}{2}\mu_A + \frac{1}{2}\mu_B$
  - $\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_B^2 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sigma_{AB} = 0.0028125$
  - $\sigma_P = 0.053 < \sigma_A < \sigma_B$

EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la composition de portefeuille qui minimise la variance
- Rappel :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$$

EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la composition de portefeuille qui minimise la variance
- Rappel :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$$

  - On obtient

$$x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}} = 0.57732$$

- Refaire l'exercice avec x^*

EXERCICE : PORTEFEUILLE EFFICIENT

- Calculez la composition de portefeuille qui minimise la variance
- Rappel :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$$

  - On obtient

$$x^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}} = 0.57732$$

- Refaire l'exercice avec x^*
  - On obtient

$$\sigma_P^{(x^*)} = 0.0456906 < \sigma_P^{(x=0.5)} < \sigma_A < \sigma_B$$

LE MODÈLE DE MARCHÉ (SHARPE)

- Soit N actifs de rentabilité $R_1, R_2, \cdots, R_N$
- Supposons que R_i est le résultat
  - d'une incertitude imputable à la conjoncture économique et donc **commune** à tous les actifs i

  $\Rightarrow$ on notera R_m cette composante de rentabilité commune
  - d'une incertitude propre à chaque actif i et donc **idiosyncratique**

  $\Rightarrow$ on notera ε_i cette composante de rentabilité idiosyncratique

LE MODÈLE DE MARCHÉ (SHARPE)

⇒ Pour tout titre i, on peut alors décrire sa rentabilité ainsi :

$$R_i = \mu_i + \beta_i(R_m - \mu_m) + \varepsilon_i \Leftrightarrow R_i - \mu_i = \beta_i(R_m - \mu_m) + \varepsilon_i$$

- On suppose $\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}\,(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et comme la rentabilité de marché est centrée
  - μ_i correspond à l'espérance de rentabilité de l'actif i
- β_i représente la sensibilité de R_i aux variations de R_m
  - on parle de **bêta** du titre i
  - $\beta_i R_m$ correspond au **risque systématique** (non diversifiable)
- ε_i correspond au **risque idiosyncratique** (diversifiable) de l'actif

LE MODÈLE DE MARCHÉ (SHARPE)

- Pour le portefeuille P on obtient donc
$$R_P = (x_1\mu_1, \cdots, x_N\mu_N) + (x_1\beta_1, \cdots, x_N\beta_N)(R_m - \mu_m) + (x_1\varepsilon_1, \cdots, x_N\varepsilon_N)$$
- On a donc $R_P = \mu_P + \beta_P(R_m - \mu_m) + \varepsilon_P$
- L'hypothèse $\varepsilon_i \sim \text{ i.i.d.}\,(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_P R_m) = 0$ permet d'obtenir
$$\sigma_P^2 = \beta_P^2\sigma_{R_m}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$
- $\beta_P^2\sigma_{R_m}^2$ est alors la variance systématique de P (non-diversifiable)
- σ_ε^2 est alors la variance idiosyncratique de P (diversifiable)

LE MODÈLE DE MARCHÉ : EXEMPLE

- Soit N titres et $\sigma_{R_m} = 20\%$ et $\sigma_\varepsilon = 50\%, \forall i$
- Pour $\beta_i = 0.9, \forall i$, calculez
  - la variance systématique de chaque actif i
  - la variance idiosyncratique de chaque actif i
  - la variance de chaque actif i à l'aide du modèle de marché
- Soit un portefeuille équi-pondéré de N titres
- Calculez
  - le bêta de portefeuille
  - la variance idiosyncratique du portefeuille
  - la variance systématique du portefeuille
- Discutez la variance spécifique (diversifiable) pour $N = 1$, $N = 10$, $N = 100$

LE MODÈLE DE MARCHÉ : EXEMPLE

- Pour $\beta_i = 0.9, \forall i$:
  - la variance systématique de i est $\beta_i^2 \sigma_{R_m}^2 = 0.9^2 \times 0.04 = 0.0324$
  - la variance idiosyncratique de i est $\sigma_\varepsilon^2 = 0.5^2$
  - la variance de chaque actif i est $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_\varepsilon^2 = 0.2824$
- Concernant le portefeuille
  - le bêta est $\beta_P = N^{-1} \sum_{i=1}^N \beta_i = 0.9$
  - la variance idiosyncratique est $\mathrm{var}(\varepsilon_P) = \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.25 N^{-1}$
  - la variance systématique est $\beta_P^2 \sigma_{R_m}^2 = 0.9^2 \times 0.04 = 0.0324$
  - la variance du portefeuille est $\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_{\varepsilon_P}^2$
- Discutez la variance spécifique (diversifiable) pour $N = 1$, $N = 8$, $N = 60$

LE MODÈLE DE MARCHÉ : EXEMPLE

- Pour $\beta_i = 0.9, \forall i$:
  - la variance systématique de i est $\beta_i^2 \sigma_{R_m}^2 = 0.9^2 \times 0.04 = 0.0324$
  - la variance idiosyncratique de i est $\sigma_\varepsilon^2 = 0.5^2$
  - la variance de chaque actif i est $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_\varepsilon^2 = 0.2824$
- Concernant le portefeuille
  - le bêta est $\beta_P = N^{-1} \sum_{i=1}^N \beta_i = 0.9$
  - la variance idiosyncratique est $\mathrm{var}(\varepsilon_P) = \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.25N^{-1}$
  - la variance systématique est $\beta_P^2 \sigma_{R_m}^2 = 0.9^2 \times 0.04 = 0.0324$
  - la variance du portefeuille est $\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_{R_m}^2 + \sigma_{\varepsilon_P}^2$
- Discutez la variance spécifique (diversifiable) pour $N = 1$, $N = 8$, $N = 60$
  - $N = 1 : \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.25 \gg 0.0324$
  - $N = 8 : \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.03125 < 0.0324$
  - $N = 60 : \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 0.00417 \ll 0.0324$

CONCLUSION

ET MAINTENANT...

- On passe à la théorie des options