

Économétrie non-linéaire

Chapitre 4: Modèles GARCH

Gilles de Truchis, Elena Dumitrescu

Master 2 BMM - EIPMC - GDA

Septembre 2016

Les chapitres du cours

1 Faits Stylises

2 ARCH

3 GARCH

4 Conclusions

5 Références



1. PROPRIÉTÉS DES SÉRIES FINANCIÈRES



Séries financières

Modèles ARCH / GARCH sont apparus dans le contexte du débat sur la représentation linéaire / non-linéaire des processus stochastiques temporels.

Nonlinearity in variance

A major contribution of the ARCH literature is the finding that apparent changes in the volatility of economic time series may be predictable and result from a specific type of nonlinear dependence rather than exogenous structural change in variables (Berra et Higgins, 1993, page 315).

- représentation spécifique de la non-linéarité
- modélisation simple de l'incertitude

Propriétés

I) Stationnarité

Les processus stochastiques p_t associés aux **prix d'actif** sont généralement non stationnaires au sens de la stationnarité du second ordre

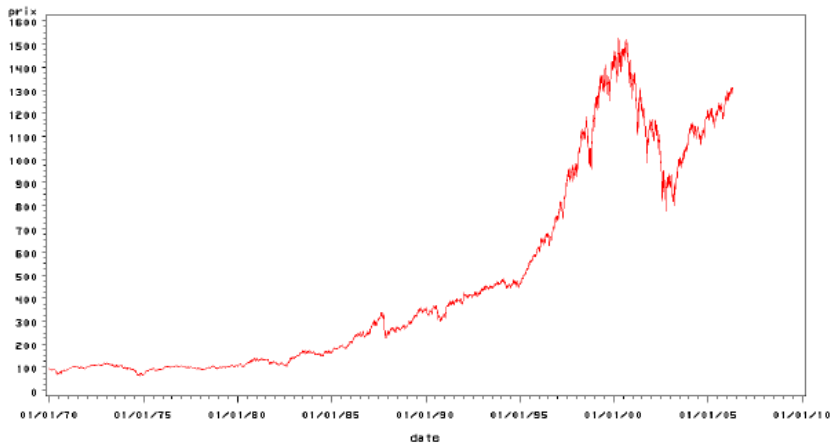
Les processus associés aux **rendements** sont compatibles avec la propriété de stationnarité au second ordre

Rappel - Ch 1 : stationnarité forte et stationnarité de second ordre



Propriétés

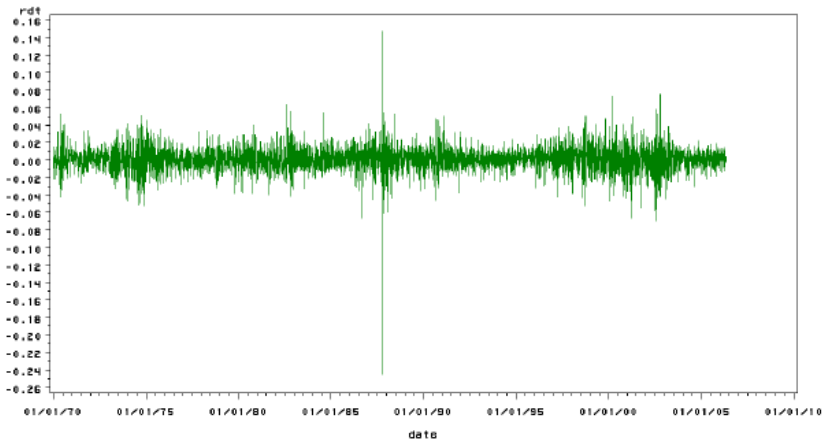
Donnees du SP500





Propriétés

Donnees du SP500





Propriétés

II) Autocorrélation des carrés des rendements

Definition (Propriété d'orthogonalité)

Sous l'hypothèse d'anticipations rationnelles, les erreurs de prévisions

$$\varepsilon_{t+1} = P_{t+1} - E_t P_{t+1}$$

doivent être nulles en moyenne et ne doivent être corrélées avec aucune information de l'ensemble \mathcal{F}_t d'information disponible à la date t

Propriétés

II) Autocorrélation des carrés des rendements

Hypothèse de marchés efficients appliquée aux rendements des actions

r_t :

$$r_{t+1} = E_t r_{t+1} + \varepsilon_{t+1}$$

où l'erreur de prévision ε_{t+1} vérifie $E(\varepsilon_{t+1}) = 0$.

Note : l'hypothèse EMH n'impose a priori aucune restriction sur la forme des moments supérieurs à un de la distribution de ε_t .

Par exemple, la variance de ε_{t+1} peut être liée avec ses valeurs passées tout en respectant l'efficience informationnelle.

Remark

EMH L'hypothèse d'anticipation rationnelle n'impose des restrictions que sur le premier moment de ε_t et l'auto-corrélation des r_t^2 n'est pas incompatible avec l'EMH.

Propriétés

II) Autocorrélation des rendements

Test de Ljung-Box Notons z_t les rendements ou les rendements aux carrés et ρ_k l'autocorrélation d'ordre k du processus z_t

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_K = 0$,

$$Q_{LB}(K) = T(T+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(K)$$

où $\hat{\rho}_k$ désigne l'autocorrélation empirique :

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (z_t - \bar{z})(z_{t-k} - \bar{z}) / (T-k)}{\sum_{t=k+1}^T (z_t - \bar{z})^2 / T}$$

Propriétés (SP 500)

Correlogram of R_SP						
Included observations: 3755						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.005	-0.005	0.1112	0.739
		2	-0.015	-0.015	1.0087	0.604
		3	-0.037	-0.037	6.2220	0.101
		4	-0.014	-0.014	6.9153	0.140
		5	-0.019	-0.020	8.2728	0.142
		6	-0.025	-0.028	10.701	0.098
		7	-0.038	-0.040	16.093	0.024
		8	0.004	0.001	16.154	0.040
		9	0.006	0.002	16.294	0.061
		10	0.025	0.021	18.570	0.046
		11	-0.028	-0.029	21.479	0.029
		12	0.029	0.027	24.575	0.017
		13	0.039	0.039	30.447	0.004
		14	0.011	0.010	30.877	0.006
		15	0.007	0.011	31.051	0.009
		16	0.002	0.007	31.065	0.013
		17	-0.023	-0.019	33.000	0.011
		18	-0.013	-0.012	33.634	0.014
		19	0.002	0.006	33.646	0.020
		20	-0.036	-0.035	38.499	0.008

Propriétés (SP 500)

Correlogram of R_SP2

Included observations: 3755

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.191	0.191	137.22	0.000
		2 0.173	0.141	249.19	0.000
		3 0.162	0.113	348.33	0.000
		4 0.114	0.050	397.09	0.000
		5 0.139	0.082	470.00	0.000
		6 0.147	0.084	551.81	0.000
		7 0.130	0.058	615.71	0.000
		8 0.123	0.046	672.88	0.000
		9 0.124	0.048	730.42	0.000
		10 0.127	0.052	791.49	0.000
		11 0.121	0.041	846.41	0.000
		12 0.119	0.037	899.35	0.000
		13 0.094	0.010	932.55	0.000
		14 0.095	0.017	966.25	0.000
		15 0.079	0.002	990.07	0.000
		16 0.113	0.046	1038.6	0.000
		17 0.094	0.017	1071.8	0.000
		18 0.110	0.037	1117.2	0.000
		19 0.115	0.039	1167.4	0.000
		20 0.083	0.003	1193.3	0.000

Propriétés

III) Asymétrie perte/gain

La distribution des cours est généralement asymétrique : il y a plus de mouvements forts à la baisse qu'à la hausse.

$$S_k < 0 \Rightarrow Pr(r_t < \mathbb{E}(r_t)) > Pr(r_t > \mathbb{E}(r_t))$$

Coefficient de Skewness :

$$\frac{\mu_3}{\sigma^3} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{r_t - \mathbb{E}r_t}{\sigma}\right)^3\right]$$

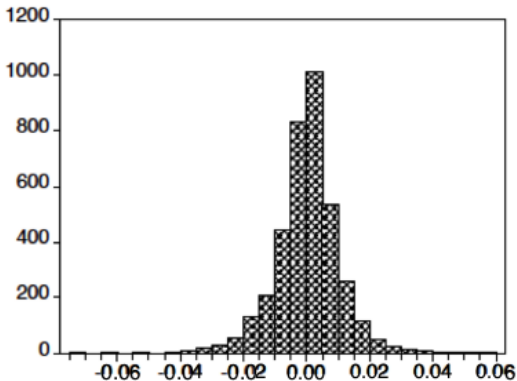
$$H_0: S_k = 0$$

Statistique de test

$$\frac{S_k^2}{\sqrt{6/T}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$$

Propriétés

Histogramme des Rendements sur SP500



Series: R_SP
Sample 2 3756
Observations 3755

Mean	0.000318
Median	8.40E-05
Maximum	0.055732
Minimum	-0.071127
Std. Dev.	0.010338
Skewness	-0.156202
Kurtosis	7.070093

Jarque-Bera	2607.105
Probability	0.000000

Propriétés

IV) Queues de distribution épaisses

L'hypothèse de normalité des rendements est généralement rejetée

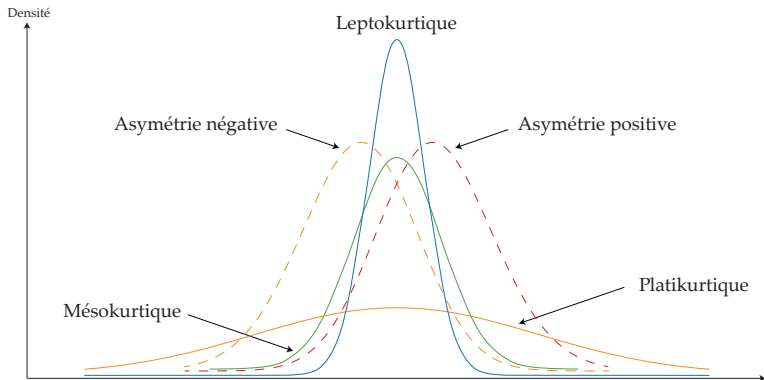
- Distribution normale : à queue "plate", *mezokurtique*
- Si le Kurtosis excède 3 (queues épaisses) la distribution est dite *leptokurtique*
- Si le Kurtosis est inférieure à 3, la distribution est dite *platikurtique*

Le **kurtosis** mesure "l'épaisseur" des queues de distribution

$$\frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{r_t - \mathbb{E}r_t}{\sigma}\right)^4\right]$$

Le **degré d'excès de Kurtosis** = $\mathbb{E}\left[\left(\frac{r_t - \mathbb{E}r_t}{\sigma}\right)^4\right] - 3$

Propriétés



Propriétés

IV) Queues de distribution épaisses

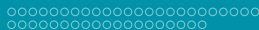
Estimateur du kurtosis

$$\hat{K}_u = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T T \left(\frac{r_t - \bar{r}_t}{\hat{\sigma}} \right)^4$$

H0 : $Ku = 3$

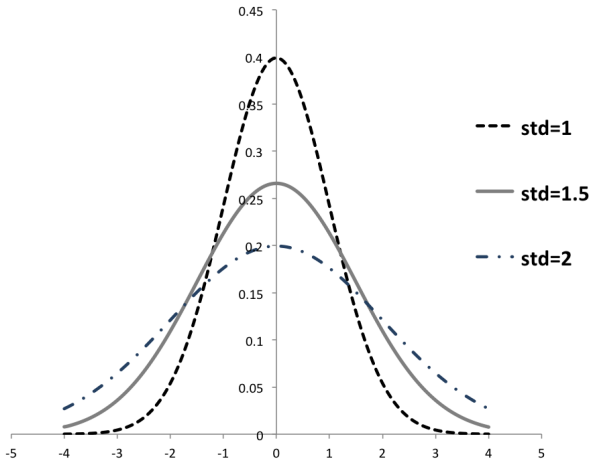
Statistique de test

$$\frac{Ku - 3}{\sqrt{24/T}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$$



Propriétés

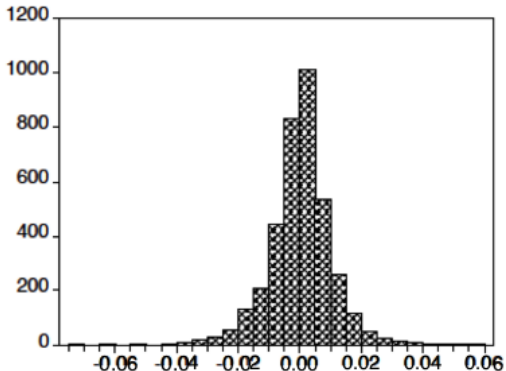
IV) Queues de distribution épaisses



Propriétés

IV) Queues de distribution épaisses

Histogramme des Rendements sur SP500



Series: R_SP
Sample 2 3756
Observations 3755

Mean	0.000318
Median	8.40E-05
Maximum	0.055732
Minimum	-0.071127
Std. Dev.	0.010338
Skewness	-0.156202
Kurtosis	7.070093

Jarque-Bera	2607.105
Probability	0.000000

Propriétés

IV) Queues de distribution épaisses

Test de Jarque Bera

H0: $S_k = 0$ et $K_u = 3$

$$JB = \frac{T}{6} \hat{S}_k^2 + \frac{T}{24} (\hat{K}_u - 3)^2 \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(2)$$

⇒ rejet de l'hypothèse de normalité des rendements

Propriétés

V) Clusters de volatilité

De fortes variations des rendements sont généralement suivies de fortes variations

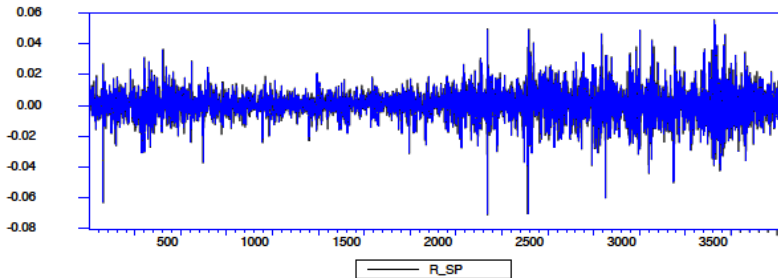
⇒ regroupement des extrêmes en cluster ou paquets de volatilités

⇒ remet en cause l'hypothèse d'homoscédasticité généralement adopté en économétrie linéaire

Propriétés

V) Clusters de volatilité

Illustration des Clusters de Volatilité sur les Rendements du SP500



Propriétés

VI) Queues épaisses conditionnelles

Même une fois corrigée du phénomène de volatilité clustering (par exemple avec des modèles ARCH / GARCH), la distribution des résidus demeure leptokurtique même si la kurtosis est plus faible que dans le cas non conditionnel

Propriétés

VII) Effet de levier

Asymétrie entre l'effet des valeurs passées négatives et l'effet des valeurs passées positives sur la volatilité des cours ou de rendements

Les baisses de cours tendent à engendrer une augmentation de la volatilité supérieure à celle induite par une hausse des cours de même ampleur

Propriétés

VIII) Saisonnalité

Les returns présentent de nombreux phénomènes de saisonnalité (effets weekend, effet janvier etc..)

Illustration de l'Effet Janvier.

Période	Return Moyen (% par mois)	
	Janvier	Autres Mois
1904-1928	1.30	0.44
1929-1940	6.63	-0.60
1940-1974	3.91	0.70
1904-1974	3.48	0.42

Sources: Rozeff et Kinney (1976) cité dans Cobbaut (1997)

Illustration de l'Effet Week-End.

		Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
French (1980)	1953-1977	-0.17	0.02	0.10	0.04	0.09
Gibbons et Hess (1981)	1962-1978	-0.13	0.00	0.10	0.03	0.08

Sources: Cobbaut (1997). Return en pourcentage par mois, marché action US.

Propriétés

Remark

Ces propriétés sont difficiles, voir impossibles, à reproduire à partir de modèle ARMA linéaires classiques

Le théorème central de l'analyse des séries temporelles : le théorème de Wold (1954) - écriture MA de v.a. non-corrélés (cf. Chapitre 1)

⇒ l'hypothèse de processus ARMA stationnaires ne permet pas de prendre en compte

i) l'autocorrélation du carré des rendements,

ii) les clusters des volatilité et

iii) les queues de distribution épaisses



Approche ARCH-GARCH

Objectif : prendre en compte les variances conditionnelles dépendant du temps \Rightarrow remise en cause de la propriété d'homoscédasticité

Analyse traditionnelle de la prévision (cf. Box et Jenkins)

exemple:

AR (1) stationnaire $X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$, avec ε_t i.i.d $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$$E(X_{t+1}) = 0$$

$$E(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots) = \theta X_t$$

Note: l'amélioration des prévisions issues de modèles de séries temporelles provient clairement de l'exploitation de l'information contenue dans l'espérance conditionnelle du processus

Approche ARCH-GARCH

L'idée d'Engle (1982) : tenir compte des autres moments conditionnels de ce processus

Or, pour un processus AR(1)

$$E(X_{t+1}^2) = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \theta^2)$$

$$E(X_{t+1}^2 | X_t, X_{t-1}, \dots) = \sigma_\varepsilon^2$$

sont constantes quelle que soit la date de la prévision

Avec de tels modèles on est donc incapables de mesurer d'éventuels changements dans les variances des erreurs de prévision même si l'on souhaite que celles-ci soient affectées par l'évolution passée

Approche ARCH-GARCH

Le principe général proposé par [Engle \(1982\)](#) consiste à supposer que la variance dépend de l'ensemble informationnel dont on dispose (évolue dans le temps)

⇒ Spécification **ARCH(q)** où le carré des perturbations suit un processus autorégressif d'ordre q

$$V(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = f(X_1, X_2, \dots, X_t; \theta)$$

$$V(X_{t+1}) = c$$

Les modèles ARCH sont donc des **modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques**

Famille des modèles ARCH

- **modèles linéaires** - spécification quadratique de la variance conditionnelle des perturbations (ARCH(q), GARCH(p , q) et IGARCH(p , q)) (cf. le cours de V. Bouvatier)
- **modèles non-linéaires** - spécifications asymétriques des perturbations (EGARCH(p , q), GJRARCH(p,q), TGARCH(p , q)...)

Modèle ARCH

Définition: ARCH(1) , Engle (1982)

$$X_t \sim ARCH(1) \text{ si } X_t = z_t \sqrt{(h_t)}, h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$$

z_t - bruit blanc fort

h_t - processus qui conditionnellement à l'ensemble d'information des valeurs passées de X_t est déterministe et positif

$$\begin{aligned} V(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= V(z_t \sqrt{(h_t)} | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= h_t V(z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = h_t \sigma_z^2 \\ &= h_t, \sigma_z^2 \text{ normalisé à 1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow h_t$ est la variance conditionnelle de X_t



Modèles ARCH



Modèles ARCH

Moments du processus ARCH

i) $E(X_t) = 0$ et $E(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$, où $\mathcal{F}_{t-1} = X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$

ii) $V(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \forall t$

$$V(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = h_t \forall t$$



Modèles ARCH

Moments du processus ARCH (Proofs)

i)

$$\begin{aligned}
 E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= E(z_t \sqrt{h_t} | \mathcal{F}_{t-1}) \\
 &= \sqrt{h_t} E(z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0 \text{ si } z_t \text{ est bb faible}
 \end{aligned}$$

$$E(X_t) = E(E(X_t) | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

ii)

$$\begin{aligned}
 V(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= V(z_t \sqrt{h_t} | \mathcal{F}_{t-1}) \\
 &= h_t V(z_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\
 &= h_t V(z_t) \\
 &= h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2.
 \end{aligned}$$

$$V(X_t) = E((X_t - E(X_t))^2) = E(X_t^2)$$

De l'écriture autorégressive sur X_t^2 du modèle ARCH sous hypothèse de stationnarité ($E(X_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(X_t^2)$) on a

$$E(X_t^2) = V(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Modèles ARCH

Moments du processus ARCH

- La variance marginale du processus X_t existe si et seulement si $\alpha_0 > 0$ et $0 < \alpha_1 \leq 1$.
- Les auto-covariances conditionnelles du processus ARCH(1) X_t sont nulles :

$$\text{cov}(X_t, X_{t+k} | X_{t-h}) = 0, \quad \forall h \geq 1, \quad \forall k \geq 1$$

- moment conditionnel centré d'ordre 4 de X_t vérifie :

$$E(X_t^4 | X_{t-1}) = 3(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2$$

- La kurtosis non conditionnelle associée au processus ARCH(1) est

$$\text{égale à : } \text{Kurtosis} = \frac{E(X_t^4)}{E(X_t^2)^2} = 3\left(\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}\right) > 3$$



Modèles avec erreurs ARCH

Modèle linéaire auto-régressif $Y_t = E(Y_t|Y_{t-1}) + \varepsilon_t$

où ε_t est un bruit blanc faible

$$E(\varepsilon) = 0 \text{ et } E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 \text{ si } s \neq t,$$

satisfaisant la condition de différence de martingale

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0.$$

On suppose que ce résidu admet une représentation de type ARCH(q): $\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$ avec $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$

où z_t est un bruit blanc faible



Modèles GARCH

Modèles GARCH

Definition

Un processus ε_t satisfait une représentation GARCH(p, q) si

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t},$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i},$$

où z_t est un bruit blanc faible

et où $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q$ et $\beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p$



Modèles GARCH

Moments conditionnels

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0$$

$$V(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i},$$

Variance non-conditionnelle

$$V(X_t) = E(X_t - E(X_t))^2 = E(X_t^2)$$

$$V(X_t) = E(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)}$$

Modèles GARCH

Variance non-conditionnelle (proof)

De l'écriture ARMA sur ε_t^2 du modèle GARCH stationnaire ($\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + \mu_t - \sum_{i=1}^p \beta_i \mu_{t-i}$, avec innovations $\mu_t = \varepsilon_t^2 - h_t$) on a

$$E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) E(\varepsilon_{t-i}^2) + E(\mu_t) - \sum_{i=1}^p \beta_i E(\mu_{t-i})$$

$$= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) E(\varepsilon_t^2) + E(\mu_t) - \sum_{i=1}^p \beta_i E(\mu_{t-i})$$

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)\right) E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0$$

$$V(X_t) = E(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)}$$



Estimation (MLE)

Rappel sur l'idée du **MV** :

i) on postule une distribution conditionnelle de ε_t

Hypothèse de Normalité

Si $z_t \sim N(\mu_z, \sigma_z)$, alors les processus ARCH(q) et GARCH(p,q) suivent conditionnellement à l'ensemble de l'information disponible \mathcal{F}_{t-1} une loi normale de

- moyenne $E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$
- variance $V(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = h_t$

Estimation (MLE)

Rappel sur l'idée du **MV** :

ii) on déduit la log-vraisemblance associée à l'échantillon $\ell(\varepsilon_t, \theta)$, avec θ le vecteur de paramètres

Hypothèse de Normalité

La fonction de log-vraisemblance (pseudo log-vraisemblance) associée à un échantillon de T observations $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T)$ de ε_t sous l'hypothèse de normalité de la loi conditionnelle de ε_t sachant \mathcal{F}_{t-1} s'écrit :

$$\begin{aligned} \ell(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T; \theta) &= \sum_{t=1}^T \log f(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(h_t(\theta)) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t(\theta)} \end{aligned}$$

Estimation (MLE)

Rappel sur l'idée du **MV** :

iii) on cherche les estimateurs du MV, $\hat{\theta}_{MV} = \arg \underset{\theta \in \Theta}{Max} \ell(\varepsilon_t, \theta)$

Hypothèse de Normalité

L'estimateur du maximum de vraisemblance θ sous l'hypothèse de normalité, satisfait le système non linéaire d'équations suivant (CPO):

$$\left. \frac{\partial \ell(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}} = 0$$

L'estimateur θ n'a pas de formule explicite, et peut être obtenu en utilisant des méthodes d'optimisation numériques comme par exemple l'algorithme de Newton-Raphson.

L'estimateur θ vérifie

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I_T^{-1}(\theta_0))$$

(cf. Chapitre 1 sur le MLE et le QMLE)



Estimation (MLE)

Example : SP500

$$dSP_t = c + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \sim N.i.d.(0, 1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Estimation (MLE)

Le Système SAS

The AUTOREG Procedure

Dependent Variable dlsp
Ordinary Least Squares Estimates

SSE	0.40117	DFE	3754
MSE	0.0001069	Root MSE	0.01034
SBC	-23672.063	AIC	-23678.294
Regress R-Square	0.0000	Total R-Square	0.0000
!Durbin-Watson	2.0103		

Variable	DDL	Estimation	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000318	0.000169	1.88	0.0598

Algorithm converged.

GARCH Estimates

SSE	0.40125116	Observations	3755
MSE	0.0001069	Uncond Var	0.00012899
Log Likelihood	12286.4373	Total R-Square	.
SBC	-24539.951	AIC	-24564.875
Normality Test	3199.6495	Pr > ChiSq	<.0001

Variable	DDL	Estimation	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000465	0.000138	3.37	0.0008
ARCH0	1	4.8418E-7	9.4476E-8	5.12	<.0001
ARCH1	1	0.0443	0.003015	14.70	<.0001
GARCH1	1	0.9519	0.003226	295.09	<.0001



Modèles GARCH

Exemple : SP500

$$dSP_t = \underset{3.37}{0.000465} + \varepsilon_t$$

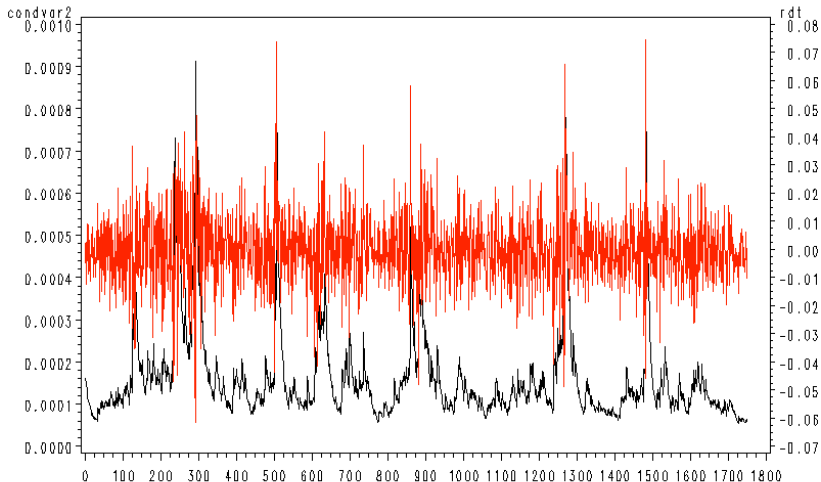
$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \sim N.i.d.(0, 1)$$

$$h_t = \underset{5.12}{4.84e^{-7}} + \underset{14.7}{0.0443} \varepsilon_{t-1}^2 + \underset{295}{0.9519} h_{t-1}$$

Modèles GARCH

Variance conditionnelle et Rendements estimés

Exemple du GARCH(1,1)





Modèles GARCH

Exemple : SP500 AR(2)-GARCH(1,3) troué

$$dSP_t = c + \phi_1 dSP_{t-1} + \phi_2 dSP_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \sim N.i.d.(0, 1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_3 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

code SAS:

```
proc autoreg data=donnees;
  model  $dSP_t = /nlag=2$  garch=(q=(1,3),p=1) covest=qml;
  output out=r r=yresid;
run;
```


oooooooooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooo

oooooooooooooooooooo●oooooooooo
oooooooooooooooooooooooooooo

Modèles GARCH

GARCH Estimates

SSE	0.40156741	Observations	3755
MSE	0.0001069	Uncond Var	0.00011318
Log Likelihood	12292.177	Total R-Square	.
SBC	-24526.738	AIC	-24570.354
Normality Test	2395.3023	Pr > ChiSq	<.0001

Variable	DDL	Estimation	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000506	0.000136	3.71	0.0002
AR1	1	-0.0166	0.0170	-0.98	0.3268
AR2	1	-0.005916	0.0199	-0.30	0.7665
ARCH0	1	2.8496E-7	3.4826E-7	0.82	0.4132
ARCH1	1	0.0729	0.0198	3.68	0.0002
ARCH3	1	-0.0436	0.0313	-1.39	0.1633
GARCH1	1	0.9682	0.0250	38.66	<.0001



Modèles GARCH

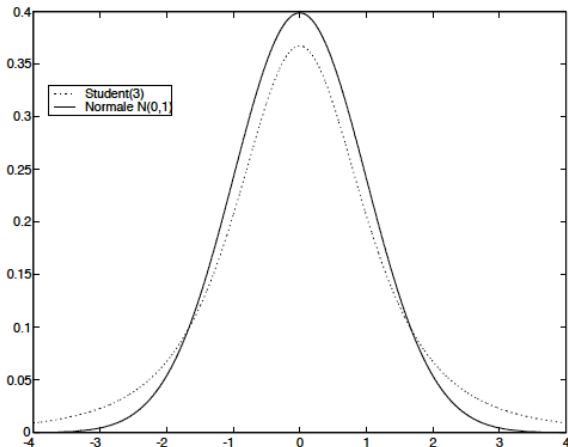
Estimateurs du MV sous d'autres lois

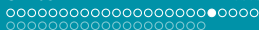
- i) Student
- ii) Skewed Student
- iii) GED

Modèles GARCH

MV sous Student

Comparaison entre les Distributions de Student et Normale





Modèles GARCH

MV sous Student

Si la variable z_t admet une distribution de Student à v degrés de libertés, où $v \in \mathbb{R}$ vérifie $v > 2$, alors la log-vraisemblance associée à une observation et à l'ensemble de paramètres θ s'écrit :

$$\begin{aligned} \ell(\theta, \varepsilon_t) = & \log \left[\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \right] - \log \left[\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \right] \\ & - 0.5 \left[\log[\pi(v-2)] + \log(h_t) + (1-v) \log\left(1 + \frac{z_t^2}{v-2}\right) \right] \end{aligned}$$

où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction Gamma et où $z_t = \frac{\varepsilon_t - E\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}$

Modèles GARCH

AR(2)-GARCH(1,3) sous Student

GARCH Estimates

SSE	0.40122616	Observations	3755
MSE	0.0001069	Uncond Var	.
Log Likelihood	14457.071	Total R-Square	.
SBC	-28848.295	AIC	-28898.142
Normality Test	5752.8219	Pr > ChiSq	<.0001

Variable	DDL	Estimation	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000520	0.000101	5.12	<.0001
AR1	1	0.005989	0.0142	0.42	0.6740
AR2	1	0.0182	0.0140	1.30	0.1921
ARCH0	1	9.2511E-6	0.0000282	0.33	0.7426
ARCH1	1	0.7571	2.2852	0.33	0.7404
ARCH3	1	1.1003	3.3777	0.33	0.7446
GARCH1	1	0.8911	0.0167	53.47	<.0001
TDF1	1	0.4869	0.0399	12.21	<.0001

$$v = \frac{1}{TDF1} = 2.0538$$

Modèles GARCH

MV sous Student dissymétrique standardisée

$$\ell(\theta, \varepsilon_t) = \log \left[\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \right] - \log \left[\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \right] + \log \left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \right) + \log(s) \\ - 0.5 \left[\log[\pi(v-2)] + \log(h_t) + (1-v) \log \left(1 + \frac{(sz_t + m)^2}{v-2} \xi^{-2I_t} \right) \right]$$

avec

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right) \sqrt{v-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right),$$

$$s^2 = \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1 \right) - m^2,$$

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{si } z_t \geq -\frac{m}{s} \\ 0, & \text{si } z_t \leq -\frac{m}{s} \end{cases}$$

- Distribution leptokurtique et asymétrique
- ξ paramètre d'asymétrie (si $\xi = 1$, Student classique)



Modèles GARCH

MV sous GED Si la variable z_t , telle que $E(z_t) = 0$ et $V(z_t) = 1$, admet une distribution GED de paramètre $v > 0$, sa densité est définie par :

$$f_z(z_t) = \frac{v \exp(-0.5|z_t/\lambda|^v)}{\lambda 2^{[(v+1)/v]} \Gamma(1/v)}$$

où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction gamma et λ est une constante définie par

$$\lambda = \left[\frac{2^{-\frac{2}{v}} \Gamma(1/v)}{\Gamma(3/v)} \right]^{\frac{1}{2}}$$



Modèles GARCH

MV sous GED

Si la variable z_t admet une distribution GED avec $v \in \mathcal{R}^*$, alors la log-vraisemblance associée à une observation z_t et à l'ensemble de paramètres θ s'écrit :

$$\ell(\theta, \varepsilon_t) = \log(v/\lambda) - 0.5 \left| \frac{z_t}{\lambda} \right|^v - (1 + v^{-1}) \log(2) - \log \left[\Gamma\left(\frac{1}{v}\right) \right] - 0.5 \log(h_t)$$

avec

$$\lambda = \sqrt{\frac{2^{-2/v} \Gamma(\frac{1}{v})}{\Gamma(\frac{3}{v})}}$$

où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction Gamma.

Extensions

- 1 Modèles ARMA-GARCH
- 2 GARCH-M
- 3 IGARCH
- 4 GARCH asymétriques

Extension 2. GARCH-M

- Engle et al. (1987)

$$y_t = x_t b + \delta h_t + \varepsilon_t = x_t b + \delta V(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}, \quad z_t \text{ i.i.d. } (0, 1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

Trois cas :

$$y_t = x_t b + \delta h_t + \varepsilon_t \quad \text{Forme linéaire}$$

$$y_t = x_t b + \delta \log(h_t) + \varepsilon_t \quad \text{Forme log-linéaire}$$

$$y_t = x_t b + \delta \sqrt{h_t} + \varepsilon_t \quad \text{Forme racine carrée}$$

Note: la variance conditionnelle est une variable explicative de la moyenne conditionnelle

Extension 2. GARCH-M

SP500 : GARCH(1,1)-M spécification racine carrée

GARCH Estimates

SSE	0.40117164	Observations	3755
MSE	0.0001068	Uncond Var	.
Log Likelihood	12287.2538	Total R-Square	.
SBC	-24533.353	AIC	-24564.508
Normality Test	3216.2064	Pr > ChiSq	<.0001

Variable	DDL	Estimation	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	-0.000021	0.000425	-0.05	0.9612
ARCH0	1	5.1173E-7	1.0134E-7	5.05	<.0001
ARCH1	1	0.0455	0.003159	14.41	<.0001
GARCH1	1	0.9505	0.003429	277.15	<.0001
DELTA	1	0.0629	0.0514	1.22	0.2208



Extension 4. GARCH Asymétriques

GARCH: la réponse de la volatilité future aux variations de prix déterminée uniquement par l'ampleur de ces dernières et non leur signe.

Les modèles GARCH asymétriques étendent ces spécifications en incorporant de l'asymétrie dans la réponse de la volatilité aux variations de prix



Extension 4. GARCH Asymétriques

EGARCH

- Nelson (1991)

Un processus ε_t satisfait une représentation EGARCH(p,q) si et seulement si :

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i})$$

où le résidu normalisé z_t est un bruit blanc faible et où la fonction $g(\cdot)$ vérifie :

$$g(z_{t-i}) = \theta z_{t-i} + \gamma(|z_{t-i}| - \mathbb{E}|z_{t-i}|)$$



Extension 4. GARCH Asymétriques

EGARCH

$E[|z_{t-1}|]$ dépend de la loi supposée de z_t

$$E[|z_t|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ Loi Gaussienne}$$

$$E[|z_t|] = 2 \frac{\gamma(\frac{v}{2})\sqrt{v-2}}{\sqrt{\pi}(v-1)\Gamma(\frac{v}{2})} \text{ Loi de Student (v)}$$

$$E[|z_t|] = \frac{4\xi^2\Gamma(\frac{1+v}{2})\sqrt{v-2}}{(\xi + \frac{1}{xi})\sqrt{\pi}(v-1)\Gamma(\frac{v}{2})} \text{ Loi de Student dissymétrique (\xi)}$$

$$E[|z_t|] = \frac{\Gamma\frac{2}{v}}{\sqrt{\Gamma(\frac{1}{v})\Gamma(\frac{3}{v})}} \text{ Loi GED (v)}$$

Extension 4. GARCH Asymétriques

GJR-GARCH

- [Glosten et al \(1993\)](#) Un processus ε_t satisfait une représentation GJR-GARCH(p,q) si et seulement si :

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \varepsilon_{t-i} + \gamma_i \mathbf{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

où le résidu normalisé z_t est un bruit blanc faible et $\mathbf{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0}$ désigne la fonction indicatrice telle que

$\mathbf{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 1$ si $\varepsilon_{t-i} < 0$ et $\mathbf{I}_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 0$ sinon



Extension 4. GARCH Asymétriques

GJR-GARCH(1,1)

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \mathbf{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

ou

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_{pos} \mathbf{I}_{\varepsilon_{t-1} \geq 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_{neg} \mathbf{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Extension 4. GARCH Asymétriques

Nasdaq : GJR-GARCH(1,1)

NOTE: At FIML Iteration 40 CONVERGE=0.001 Criteria Met.

Estimations FIML Parameter non linéaires

Parameter	Estimation	Erreur standard appr.	Valeur du test t	Approx Pr > t
alpha0	-0.1217	0.0285	-4.26	<.0001
alpha1	0.06046	0.00968	6.25	<.0001
beta1	0.985106	0.00339	290.93	<.0001
theta	3.198596	0.5900	5.42	<.0001
intercept	0.000413	0.000225	1.84	0.0665



Extension 4. GARCH Asymétriques

TGARCH(1,1)

- Zakoian (1994)

Un processus ε_t satisfait une représentation TGARCH(1,1) si et seulement si :

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

$$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha_{pos} I_{\varepsilon_{t-1} \geq 0} \varepsilon_{t-1} - \alpha_{neg} I_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1} + \beta_1 \sqrt{h_{t-1}}$$

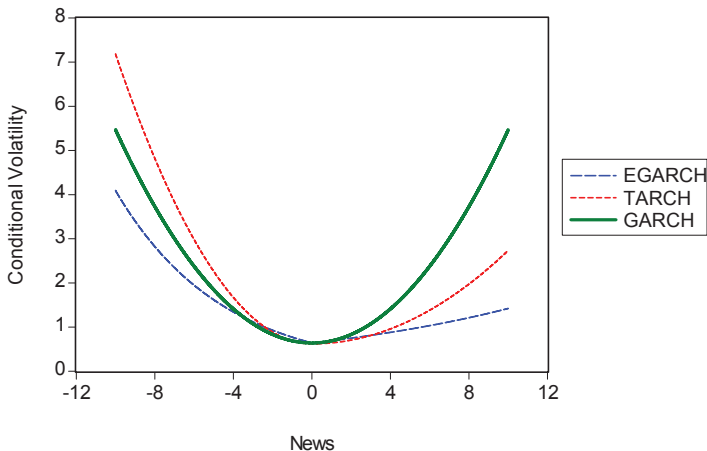
où le résidu normalisé z_t est un bruit faible et $I_{\varepsilon_{t-1} < 0}$ désigne la fonction indicatrice telle que

$I_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 1$ si $\varepsilon_{t-i} < 0$ et $I_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 0$ sinon

- Asymétrie spécifiée sur l'écart type et non sur la variance conditionnelle



News Impact Curve (NIC)



News Impact Curves For Daily Volatility of the Dow Jones Industrial Average (DJIA) 1915-2001.



Test d'effet ARCH/GARCH

- Tests habituels d'autocorrélation sur la série des rendements au carré X_t^2 : **Ljung Box**

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_K = 0 ,$$

$$Q_{LB}(K) = T(T+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(K)$$

où $\hat{\rho}_k$ désigne l'autocorrélation empirique :

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (X_t^2 - \bar{X}^2)(X_{t-k}^2 - \bar{X}^2)/(T-k)}{\sum_{t=k+1}^T (X_t^2 - \bar{X}^2)^2/T}$$

Test d'effet ARCH/GARCH

- **ARCH-LM** test d'homoscédasticité conditionnelle

Regression auxiliaire :

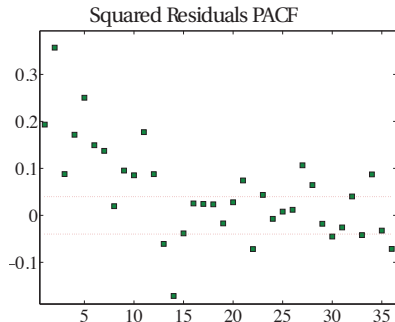
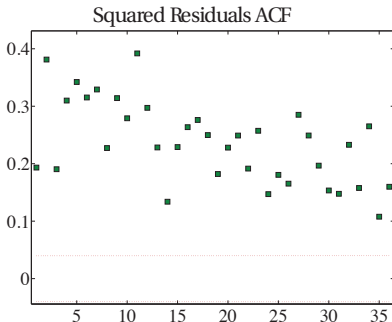
$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \phi_0 + \phi_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \dots + \phi_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2 + \eta_t$$

$$H_0 : \phi_1 = \dots = \phi_p = 0$$

$$\text{Statistique de test : } LM(p) = T \times R^2 \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(p)$$

Test d'effet ARCH/GARCH

ACF and PACF of squared returns of the S&P 500



Test d'effet ARCH/GARCH

Validation du modèle (G)ARCH choisi

Ljung Box test sur les résidus standardisés $\hat{z}_t = X_t/\sqrt{h_t}$

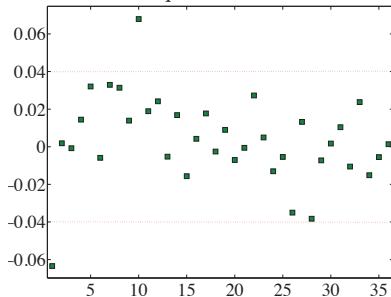
$$Q_{LB,\hat{z}}(K) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \chi^2(K - m),$$

où m représente le nombre de paramètres estimés dans le modèle (G)ARCH

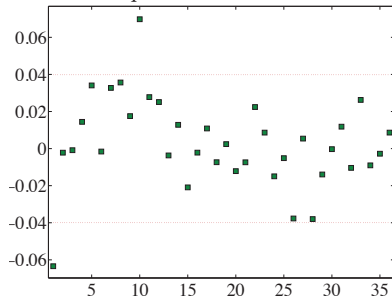
Test d'effet ARCH/GARCH

ACF and PACF of squared returns of the S&P 500 (continued)

Standardized Squared Residuals ACF



Standardized Squared Residuals PACF



Conclusions

Démarche - estimation des modèles de la famille GARCH

- Est-ce que la modélisation (G)ARCH est appropriée ? \Rightarrow tester la présence d'effets ARCH sur le serie des rendements
- Est-ce que des termes autoregréssifs ou moyenne mobile sont nécessaires ? \Rightarrow tester la présence d'autocorrélation dans la série des rendements
- Estimer le modèle choisi précédemment
- Testez la validité de ce modèle en appliquant le test d'effet ARCH / GARCH sur la série des innovations \hat{z}_t . Si le modèle n'est pas valide augmentez l'ordre p ou q du modèle GARCH
- Enrichir le modèle en autorisant des effets d'asymétrie, par exemple.

Bibliographie générale :

- Bollerslev, T, 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* (1986)
- Engle, R.F., Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.
- Engle, R.F., D. Lilien, and R. Robins, 1987. Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model, *Econometrica*, 5(5), 391-408.
- Engle, R.F. and T. Bollerslev, 1987. Modelling the Persistence of Conditional Variances. *Econometric Reviews*, 5(1), 1-50.
- Engle, R.F. and V.K. Ng, 1993. Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48(5), 1749-78.
- Glosten, L. R., R. Jaganathan, and D. Runkle, 1993. On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Normal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
- Nelson, D., 1991. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach, *Econometrica*, 59, 347-370.
- Nelson, D.B., 1990, Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model, *Econometric Theory*, 6, 318-334.
- Weiss, A.A., 1984. ARMA models with ARCH errors, *Journal of Time Series Analysis*, 5, 129-143.
- Zakoïan, J. M., 1994. Threshold Heteroskedastic Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931-944.